

TESIS DE MÁSTER

Máster

Máster en Ingeniería Estructural y de la Construcción

Título

Aplicación de la teoría Zig-Zag Refinada para el análisis de vigas Laminadas de Madera

Autor

Mikel Puy Galarza

Tutor

Daniel Di Capua

Intensificación

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería

Fecha

2 de Julio de 2015

RESUMEN

Este Trabajo Final de Máster tiene el objetivo de contribuir a la difusión del uso de la Madera Laminada Encolada y de las herramientas numéricas disponibles para el cálculo de este tipo de elementos.

Hasta la fecha son pocos los programas en los que se integra de forma precisa el cálculo seccional exacto de elementos compuesto laminares. Por ello se presenta la Teoría Zig-Zag Refinada, en sus diversas formas, y se añade un elemento de dos nodos basado en la Teoría Refinada Zig-Zag extendida de Euler Bernoulli.

El trabajo está compuesto por dos grandes bloques. El primero de ellos referente a la tecnología del material objeto del trabajo, la Madera Laminada Encolada. Dicho material nació para una aplicación directa estructural y a pesar de ser conocido hace varios años hoy día no tiene un uso muy extendido en la península. Por lo tanto se realiza en una primera parte la documentación del estado del arte de dicho material, se repasan las normas reconocidas aplicables en España y se resumen tanto sus ventajas y desventajas como las aplicaciones y avances que ha tenido hasta hoy día.

En el segundo gran bloque el trabajo se centra en la tecnología del cálculo estructural y realiza una primera aproximación repasando a través de la historia la evolución de esta. En última instancia se centra en el método numérico de los elementos finitos, MEF, aplicado al cálculo de vigas de materiales compuestos y vigas sándwich. Exactamente se desarrollan las Teorías de Vigas extendidas Zig-Zag Refinadas ya que se consideran las más apropiadas para ser implementadas en software de cálculo estructural por su eficacia y bajo coste computacional.

Mencionar que se centra en la aplicación de la Teoría de Vigas Zig-Zag Refinada Extendida de Euler Bernoulli a la cual se le da la oportunidad y se contrasta con la Teoría de Vigas Zig-Zag Refinada Extendida de Timoshenko. Se realizan varios ejemplos numéricos con dicha teoría, y se aplica al cálculo de elementos viga compuestos de Madera Laminada Encolada.

ÍNDICE

Resumen	i
Índice.....	ii
1. Tecnología de la Madera Laminada Encolada.....	1
1.1 Estado del Arte	1
1.1.1 Introducción.....	1
1.1.2 Definición	2
1.1.3 Nacimiento de la madera laminada encolada y su establecimiento como material de construcción.....	3
<i>En la Península Ibérica.....</i>	<i>7</i>
1.1.4 Proceso de fabricación de la M.L.E.....	8
1.1.5 Ventajas y Desventajas.....	14
1.1.6 Evolución, Innovación y Aplicaciones.....	19
<i>Aplicaciones.....</i>	<i>19</i>
1.2 Normativa.....	24
<i>Normas de edificación</i>	<i>26</i>
<i>Normas de Fabricación.....</i>	<i>27</i>
1.2.1 Aspectos técnicos y cálculo.....	28
<i>Uniones</i>	<i>31</i>
1.2.2 Madera laminada encolada.....	33
1.2.3 Cálculo y Verificación (CTE DB-SE-M).....	34
<i>Estados límite</i>	<i>34</i>
2. Tecnología del Cálculo Estructural.....	39
2.1 Breve historia del análisis estructural.....	39
2.1.1 Lo que supuso el avance computacional.....	40
2.2 Métodos numéricos y análisis computacional	41
2.2.1 Método de los elementos finitos (MEF)	42
2.2.2 Planteamiento del problema	44
<i>Bases teóricas – Teoría de vigas de Euler-Bernoulli.....</i>	<i>45</i>
2.2.3 Límites de los metodos numericos	47
2.3 Materiales compuestos y MEF.....	50
2.3.1 Analisis de vigas planas	51
2.3.2 Teorias de viga para laminados compuestos	53
<i>Teoria layer-wise.....</i>	<i>53</i>
<i>Teorias zig-zag</i>	<i>55</i>
3. Teoria Zig-Zag Refinada.....	57
3.1 Teoría Zig-Zag Refinada	57
3.1.1 Elemento de viga compuesta laminada de dos nodos LRZ.....	62

3.1.2 Modelado de la delaminacion con elementos LRZ	65
3.1.3 Conclusiones.....	66
3.2 Elemento de viga Zig-Zag basado en la teoria extendida de Euler-Bernoulli (EEBZ2)	67
3.2.1 Elemento de viga compuesta laminada de dos nodos EEBZ2.....	73
<i>Calculo del parametro β_s^k</i>	76
3.2.2 Ejemplos numericos	77
3.2.3 Modelo de delaminacion	83
3.2.4 Conclusiones.....	86
4. Ejemplos Numéricos	87
4.1 Planteamiento de los ejemplos	87
4.2 Ejemplo N°1: <i>Viga de M.L.E. de clase resistente GL28h biapoyada con carga uniforme</i>	89
<i>Conclusiones</i>	96
4.2.1 Ejemplo N°1 redimensionado a una viga con canto de 1,2 m	97
<i>Conclusiones</i>	100
4.3 Ejemplo N°2: <i>Viga de M.L.E. de clase resistente GL28c biapoyada con carga uniforme</i>	100
<i>Conclusiones</i>	106
4.3.1 Ejemplo N°2 redimensionado a una viga con canto de 1,2 m	107
<i>Conclusiones</i>	110
4.4 Modelado de la delaminación: <i>viga de M.L.E biapoyada con carga uniforme</i>	110
4.4.1 Post-proceso	112
<i>Delaminacion de 1/5 inferior de la viga (interfase 12)</i>	113
<i>Delaminacion de la mitad de la viga (interfase 29)</i>	116
<i>Delaminacion de 1/5 superior de la viga (interfase 46)</i>	119
<i>Conclusiones</i>	122
5. Conclusiones finales.....	124
Bibliografía	126

1. TECNOLOGÍA DE LA MADERA LAMINADA ENCOLADA

1.1 ESTADO DEL ARTE

1.1.1 INTRODUCCIÓN

La madera es un material que ha sido utilizado desde los primeros tiempos por el hombre, inicialmente como combustible o para la realización de utensilios y herramientas. Posteriormente al sentir la necesidad de más seguridad, que la que le otorgaban sus refugios o cavernas, comenzó a construir sus propias chozas para las cuales utilizó en un principio las ramas de madera seca que recolectaba y aquellas que podía arrancar sin mucho esfuerzo. No se han encontrado indicios de esta afirmación ya que la madera no fosiliza al igual que la piedra pero tenemos constancia explícita de ello por la actividad actual de los pueblos que siguen viviendo en la edad de piedra, como es el caso de *etnias aborígenes* del Amazonas o los *Papúes* de Nueva Guinea (por poner un ejemplo) los cuales realizan sus hogares de madera.

A continuación, evolucionaron las viviendas y las formas de construirlas, gracias a herramientas más cualificadas, hasta tal punto que las viviendas de madera familiares constituyan más del 90% de las viviendas de las antiguas ciudades. Esto unido al hacinamiento y el uso habitual de la leña para cocinar y calentarse hacía que los incendios fueran frecuentes. Teniendo en cuenta que las casas en aquel entonces estaban compuestas completamente en madera, que la madera es un producto altamente combustible y que el grado de desconocimiento era alto, se puede imaginar los innumerables daños que se produjeron por el fuego, lo que contribuyó para que se evolucionara hacia viviendas en las que la madera no era la protagonista pero en la que tenía un papel fundamental por sus características. Así surgieron las casas de adobe o de piedra (más habitual su empleo en edificación civil). En esta tipología la madera tenía el poder de cubrir las luces de los diferentes espacios gracias a sus características físicas y geométricas como son su resistencia a flexión y su linealidad.

De esta época hasta la actualidad una de las causas más significativas del avance tecnológico, en lo que se refiere a las estructuras de madera, ha venido dada por la aparición de productos de protección, por los tratamientos a los que se somete a la madera, por los adhesivos estructurales, y por el conocimiento adquirido a través del tiempo, los cuales otorgan a la madera la característica de material fiable, apto, durable y de alta calidad para la construcción.

Por último, mencionar que la *percepción negativa* que se tiene sobre la madera como material de *alta peligrosidad ígnea* se ha mantenido en el ámbito de la Europa mediterránea pero no así en los países Escandinavos, donde siempre ha sido el principal material de construcción, muy estimado por sus *cualidades isotérmicas*; ni en Estados Unidos donde la madera fue desde el principio el material de construcción más consumido.

Actualmente entre el 60 y el 80% de todas las viviendas que se construyen en países como Finlandia, Suecia, Austria, Estados Unidos y Australia son de madera.

1.1.2 DEFINICIÓN

La madera laminada encolada es un material formado por el encolado de piezas de madera adecuadamente seleccionadas que se denominan laminas de madera y que se disponen con las fibras paralelas entre si y en dirección paralela al eje longitudinal del elemento que conformaran. El espesor de la lamina oscila habitualmente entre 20 – 45 mm siendo muy frecuente las laminas de 38 mm. El número de láminas es igual o superior a 4.



Imagen 1.1 Elemento de M.L.E

Para fabricarlas se utiliza madera maciza estructural, adhesivos estructurales y productos protectores y de acabado. El tamaño de los elementos a fabricar está limitado por la capacidad de la maquina que los produce y durante la fabricación de dichos elementos es posible sanear los defectos presentes en la madera maciza como ya mencionaremos en apartados posteriores.

1.1.3 NACIMIENTO DE LA MADERA LAMINADA ENCOLADA Y SU ESTABLECIMIENTO COMO MATERIAL DE CONSTRUCCIÓN

El empleo de elementos encolados de madera tiene una larga tradición.

Las primeras referencias históricas existentes, aunque no sean aplicadas al uso estructural, provienen de las antiguas civilizaciones *china* y *egipcia*, que ya elaboraban *tableros alistonados* para mecanizar cajas y espigas empleando adhesivos de origen animal.

Del mismo modo *Leonardo Da Vinci* ya dibujo en algunos de sus esbozos de ingenios militares la utilización de láminas de madera unidas mediante cuerdas y herrajes metálicos.

Las primeras noticias que se tienen de la utilización de maderas laminadas para uso estructural, en occidente, nos remontan al siglo XVI. Entonces el arquitecto francés *Philibert de L'Orme*, uno de los grandes maestros del renacimiento en su país, traslado la tecnología de la piedra, muy conocida en aquel entonces, a la construcción de elementos de madera. Así realizo las que se podrían llamar *los primero elementos (en arco) de madera laminada* mediante la unión de tablas de madera recortadas de 1,5 a 2,5m de longitud que no estaban unidas mediante colas sino mediante zunchos de forja y otros sistemas metálicos como clavos. Esta técnica fue utilizada en la estructura de madera del *Castillo de Mulette (1548)*. En Mont-Dauphin (Hautes-Alpes) todavía es visible una de las construcciones realizadas aplicando esta técnica (Imagen 1.3).



Imagen 1.2 Philiberto de l'Orme

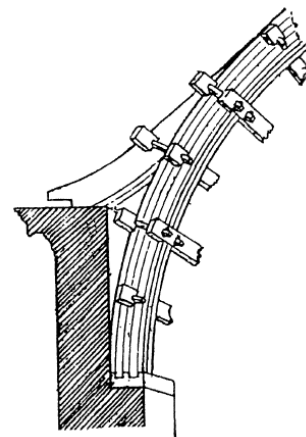


Imagen 1.3

En el siglo XIX el coronel *Francés Emy* ideo una solución para la fabricación de formas curvas mediante tablas de madera acopladas en sentido horizontal, y trabadas mediante pasadores metálicos. La técnica del coronel *Francés* se utilizo en la *Basílica de Nuestra Señora de la Salud en Patzcuaro* (Michoacán, México) en 1872 – 1883. También se aplico en la *Estación de Ferrocarril de Dieppe (en Francia)* (Imagen 1.4).



Imagen 1.4 Gare de Dieppe

El nacimiento de la madera laminada encolada, de aquí en adelante M.L.E., surgió cuando se sustituyó la utilización de bridas, tornos, clavos y otros sistemas metálicos por la caseína (conocida también como cola de carpintero) para la unión de las diferentes laminas que compondrían el material. La construcción del *auditorio de Basel*, en Suiza, en el año 1893 se puede considerar como la primera, en Europa, en la cual se utilizó por primera vez la M.L.E. a gran escala. En ella se utilizaron adhesivos que según las normas de hoy en día serían no resistentes al agua.

Los primeros productos y la primera patente de M.L.E., surgieron hacia 1901 en Suiza. La patente Suiza se refería a vigas rectas compuestas de varias láminas unidas entre sí con adhesivo.

Posteriormente, hacia el año 1906 el carpintero de Weimar (población de Alemania) *Karl Freidrich Otto Hetzer* (Imagen 1.5) obtuvo la primera patente del sistema de fabricación y método de construcción. De aquí en adelante el sistema *Hetzer* se comenzó a conocer hasta obtener en el año 1910 dos premios en la *Exposición Mundial* celebrada en Bruselas. A *Karl Freidrich Otto Hetzer* se le considera el padre de la M.L.E.



Imagen 1.5 Karl Freidrich Otto Hetzer

Mejoras en los adhesivos durante y posteriormente a la Primera Guerra Mundial, estimularon un interés adicional en Europa para utilizar madera laminada en la fabricación de aeronaves y marcos para construcción.

La M.L.E. tuvo un espectacular desarrollo en Suiza donde en 1920 ya existían más de 200 edificios con vigas y arcos tipo Hetzer. En Dinamarca la M.L.E. se comenzó a utilizar cuando *H.J.Kornerup-Koch* comenzó a fabricarla bajo la licencia Hetzer. En Escandinavia la introdujo en ingeniero *Guttorm N.Brekke*.

Max Hanisch estudio Arquitectura e Ingeniería en el Koenigliche Baugewerks Schule y posteriormente se asocio a Hetzer en la firma Weimar en 1906 donde aprendió la técnica. La primera Guerra Mundial interrumpió su actividad como proyectista y desvió su actividad a la *construcción de fábricas* para el Departamento de Guerra Alemán. Finalmente en 1923 emigro y llevo la tecnología a los Estados Unidos de América con la intención de cooperar con los Hetzer en la promoción de la M.L.E. pero no tuvo éxito y se volvió a dedicar a la práctica de la arquitectura.

En 1934 se constituyo la empresa *Unit Structures, Inc.* cuya propiedad se repartía al 50% entre la *familia Hanisch* y *Thompson*. Durante los comienzos Hanisch propuso la utilización de arcos de madera laminada encolada con adhesivo pero fue ridiculizado ya que nadie creyó posible que dichas tablas de madera encolada podrían resistir cargas y menos competir con el acero. No fue fácil convencerlos pero poco a poco fueron familiarizándose y el escepticismo comenzó a desaparecer hasta que en 1936 la *Unit Structure, Inc.* persuadió a Edgar A. Stubenrauch, arquitecto que proyecto un edificio público para la comunidad de Pittsville en donde había previsto utilizar arcos de acero, para que considerara los arcos de M.L.E. como una alternativa. Finalmente el

Arquitecto accedió y fueron analizadas ambas soluciones resultando más económica la de madera laminada ya que presentaba un comportamiento mejor ante el fuego y no requería añadir costes de protección. El resultado fue favorable para la madera y el edificio que aun sigue en pie se ejecuto con los arcos de la Unit Structures.

La Unit Structures siguió fabricando y batiendo records de luz; el primero, en 1938, al fabricar unos arcos que salvaban una luz libre de 36,5m para una edificación agrícola y posteriormente, en 1941, con unos arcos de 46,3m diseñados para un hangar. En aquel momento se usaron mucho los arcos de M.L.E. para los hangares ya que los aviones eran cada vez más grandes y los hangares por lo tanto debían de serlo también.

Cuando Estados Unidos entro en la Segunda Guerra Mundial el gobierno se dirigió a los fabricantes para saber si estarían dispuestos a suministrar madera laminada encolada para ayudar en el esfuerzo que exigía la guerra. Así lo hicieron y se estima que se ahorraron 362.880 toneladas de acero. En 1944 A.N. Carter en un artículo publicado en la revista *Scientific American* escribió: "pocos materiales han jugado un papel más importante o versátil en el programa de construcción de la guerra en América como la madera" haciendo referencia a la alternativa tan adecuada que constituya el uso de la madera en aquellos años en los que el acero estaba muy demandado para otros fines bélicos. A Unit Structures la administración le pidió que fabricara cerchas de madera aserrada para varias construcciones militares pero estos convencieron a los planificadores para que usaran arcos y vigas de M.L.E. para así poder afianzar su expansión en el mercado.

La Segunda Guerra mundial renovó nuevamente el interés en la M.L.E. provocando el desarrollo de adhesivos de resina sintética resistente al agua. Esto permitió el uso de madera laminada encolada en puentes y otras aplicaciones exteriores que requerían tratamiento de preservación.



Imagen 1.6 Sello de la AITC

En la época de la muerte de Hanisch, en el año 1950, la industria de la M.L.E. ya estaba afianzada en los Estados Unidos de América y era ampliamente reconocida como producto de construcción de primera clase. En aquel entonces había por lo

menos 12 fábricas de M.L.E. en los Estados Unidos. En 1952 los fabricantes más importantes de estructuras de madera unieron sus fuerzas y crearon el *American Institute of Timber Construction (AITC)* (Imagen 1.6) para normalizar la industria y promocionarse. Uno de los objetivos donde más esfuerzo invirtió la AITC fue en convencer a las autoridades relacionadas con la construcción y los seguros de la inherente resistencia al fuego que presentaba la madera en grandes escuadrías. En 1995 había aproximadamente 30 fabricantes de M.L.E. en Estados Unidos de América, la mayoría de los cuales estaban dentro de la AITC.

EN LA PENÍNSULA IBÉRICA

En la península ibérica las construcciones con madera laminada comienzan a generalizarse en la segunda mitad de la década de los 90, aunque ya desde la década de los 80 algunos proyectos la incorporan. La proximidad del mercado Francés, que en aquel entonces gozaba de una mayor implantación y desarrollo de esta tecnología, fue uno de los factores más influyentes para la asimilación de este producto constructivo.

La madera laminada irrumpe en la Península a raíz de varias construcciones de *centros comerciales* de origen francés hacia el año 1983. Hace unos 12 años empieza a utilizarse en edificación pese a que desde mucho antes ya se utilizaba en obras singulares. En definitiva se puede afirmar que el año 1996 fue cuando este producto comienza a utilizarse y a partir del cual su crecimiento ha sido exponencial. En el año 1996 en España se consumieron unos 6000 m³ en comparación a los 100000m³ que se llegaron a consumir en el año 2008. A pesar del crecimiento, España, todavía está muy lejos de la implantación que tienen otros países de la Unión Europea, situándose a la cola únicamente por delante de Portugal y Grecia en lo que se refiere a cantidad de m³ empleados por habitante.

Todavía, no se hace gran uso de la madera como material de construcción; y no hay una cultura lo suficientemente desarrollada en relación a los países del entorno. La gran diferencia se encuentra en el uso de la madera en el ámbito residencial, ya que en casi todos los países Europeos se usa muchísimo sobre todo para la construcción de la estructura de cubierta. Aunque vamos creciendo tardaremos a llegar a la altura de los países Centroeuropeos ya que en esto tienen este tipo de diseños incorporado hace mucho tiempo.

1.1.4 PROCESO DE FABRICACIÓN DE LA M.L.E.

El proceso de fabricación de la M.L.E. se lleva a cabo en una industria muy competitiva con un alto grado de control de calidad. En las siguientes líneas se recogen estos procesos desde la fabricación de grandes elementos estructurales, como son las vigas o pilares de M.L.E, hasta la fabricación de las uniones que generalmente se realizan en acero, aunque también existen uniones tradicionales (denominadas también uniones carpinteras).

El objetivo de la fabricación de este tipo de elementos reside en la obtención de piezas de grandes envergaduras a partir de piezas de menor dimensión encoladas entre sí. Como mencionábamos en apartados anteriores esto es posible gracias a los avances que la industria química ha aportado entre otros. La obtención de dichas piezas de grandes envergaduras tiene numerosas ventajas en comparación con productos de madera de obtención más directa, como es la madera aserrada que ha sido utilizada hace cientos de años, como son la ausencia de defectos entre otros que comentaremos.

La producción de piezas de M.L.E se realiza a partir de pre-productos producidos en la industria primaria de la madera. Para ello primero se deberán talar los árboles convenientes para este tipo de finalidad; este trabajo lo llevan a cabo las empresas que se encargan de realizar trabajos forestales para después procesar los árboles talados en los aserraderos. En estos se obtienen los pre-productos que posteriormente se procesaran en la industria de la M.L.E.

Las especies de árboles utilizados para la realización de piezas de M.L.E. son el Abeto Rojo, el Pino Oregón, el Abeto y el Pino Silvestre, aunque la madera de Chopo se atreve también a competir con los mencionados. No se hace uso de maderas de especies Frondosas porque a pesar de que tienen una resistencia alta, son menos flexible y su densidad es mayor y por tanto su peso también.

Dicho esto se puede decir que la primera fase en la producción de piezas de M.L.E. es el almacenamiento o acopio de los tablones de madera aserrada procedentes del proceso anterior. Posteriormente es necesario que dichos tablones de madera alcancen un contenido de humedad específico para que puedan ser procesados y poder utilizarlo para fin estructural. La humedad que deben tener es de entre 8-15% según su uso final; si la madera se va a tratar puede alcanzar hasta el 18%. Cuando está previsto que las piezas finales se dispongan a la intemperie dichos tablones se protegen con un tratamiento en autoclave. Este tratamiento es necesario realizarlo sobre la madera aserrada y nunca sobre la madera encolada y es normal realizarlo también en piezas que no vayan a estar expuestas a la intemperie ya que de esta forma gozan de mayor protección y durabilidad.

De este punto en adelante la mayor parte del proceso productivo esta automatizado. El siguiente control que deberán superar las tablas aserradas para poder ser mecanizadas será el del contenido de humedad. Dicho control lo realiza un higrómetro incorporado en una maquina. Dicha maquina tiene un higrómetro

incorporado que mide la cantidad de humedad que tiene cada pieza. Las piezas que compondrán el mismo elemento estructural no podrán disponer una variación de humedad entre ellas de más del 4%. De ser así esta máquina que compone el primer eslabón del proceso productivo desechara la pieza que tenga una variación mayor al 4% de humedad respecto de las piezas restantes que compondrán el mismo elemento estructural (como puede ser una viga, un pilar, una correa, etc.).

La siguiente maquina, visible en la Imagen 1.7 **Saneadora de madera**, por la que tendrán que pasar dichos tablones aserrados es la saneadora. La saneadora está compuesta por unas sierras que rechazan aquellas zonas con imperfecciones que no cumplen las prescripciones establecidas (como son los nudos, fendas, bolsas de resina, entre otros). Al principio de esta fase un operario marca con tiza las imperfecciones que visualiza en la pieza, y dicha pieza atraviesa posteriormente una sierra de disco que está dotada de unos sensores laser que identifica dichas marcas de tiza para cortar y eliminar dichas partes imperfectas. Por lo tanto superada esta fase se han eliminado los defectos de las piezas aserradas.



Imagen 1.7 Saneadora de madera

Como la finalidad del proceso es la generación de elementos estructurales de longitudes largas es necesario unir los tablones aserrados, que son de una longitud relativamente bastante menor que la pieza final, para así poder constituir un elemento más largo. A estas piezas de una dimensión mucho mayor (la longitudinal) en comparación con su espesor y anchura (la escuadría del tablón aserrado inicial) se les denomina laminas. La constitución de dichas laminas se realiza mediante uniones dentadas practicadas por unas maquinas rotativas que realizan la entalladura dentada necesaria en la testa de los tablones de madera aserrada. Dichas uniones pueden realizarse en posición horizontal (ver Imagen 1.9) o vertical (ver Imagen 1.8) en función de la forma de trabajo que finalmente tendrá el elemento que se esté constituyendo.

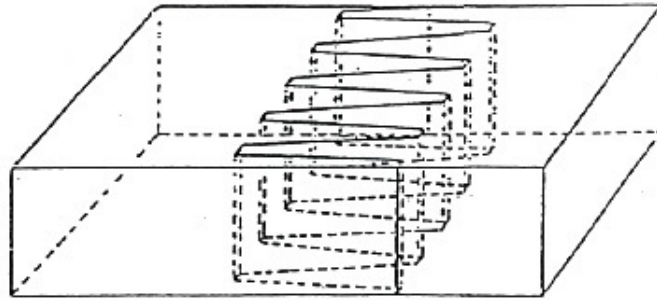


Imagen 1.8 Unión dentada vertical

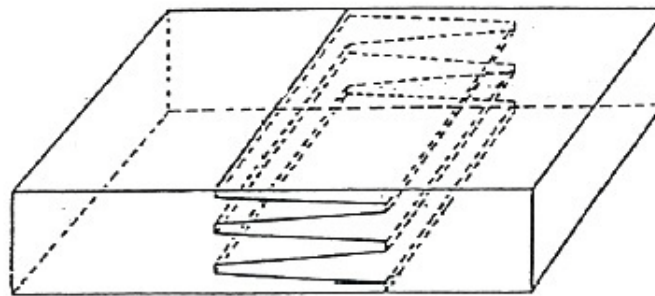


Imagen 1.9 Unión dentada horizontal

Posteriormente al proceso anterior, y antes de unir los diferentes tablones que constituirán la lámina de madera se encolan las entalladuras dentadas producidas. Sobre la utilización de las colas hablaremos en líneas sucesivas. Acto seguido al encolado, y lo antes posible con el fin de favorecer la unión encolada, se ensamblan los tablones aserrados para constituir las mencionadas laminas aplicando una presión paralela a la dirección de las fibras durante un tiempo no menor dos segundos. La presión a aplicar para realizar la unión varía en función de la longitud del diente, y son las siguientes:

Si la longitud del diente $L > 25\text{mm}$, la presión introducida $P = 2 - 5 \text{ N/mm}^2$

Si la longitud del diente $L < 25\text{mm}$, la presión introducida $P = 5 - 10 \text{ N/mm}^2$

Sera de gran importancia controlar que no se supera dicho rango de presiones en función de la longitud del diente ya que de ser superados se producirán fisuras en las zonas mecanizadas.

Hasta este punto alcanza el proceso de fabricación de las "laminas de madera" que posteriormente constituirán la viga de madera laminada. Dichas láminas se tratan con mucho cuidado y se desplazan por cintas y rodillos que generalmente hacen que la pieza esté apoyada en tramos cortos a lo largo de toda su longitud. De no ser así y como la pieza es muy esbelta esta se podría dañar dando lugar a discontinuidades que

afectarían mucho a la calidad final del elemento el cual se traduce en su capacidad resistente final.

En las posteriores líneas se hace referencia a las colas. La cola más utilizada en los inicios de la industria de la madera laminada ha sido la caseína, o lo que en la jerga de la artesanía de la madera se denomina cola de carpintero. Si esta ha sido utilizada mucho en los inicios y ahora se utiliza en menor medida es por el avance producido en la industria química. Hoy por hoy también es utilizada pero le han ganado el terreno colas con base de urea y colas con base de resorcina. Podríamos decir que las tres mencionadas son las más utilizadas frente a otras que también se utilizan pero en menor medida y que son: colas con base de poliuretanos, colas vinílicas, colas fenólicas y colas epoxídicas. Es preciso decir que es de suma importancia respetar los tiempos de fraguado necesarios para una correcta unión especificada por el fabricante de la cola. Hay que apuntar que la industria de la madera laminada no podría haber surgido si no habría sido por el avance en los distintos tipos de colas ocasionado en la industria química.

A partir de este punto se podría decir que comienza la fase en la cual se conformarán los elementos estructurales mediante la unión de las diferentes laminas creadas en los procesos anteriores. Inicialmente al encolado de las distintas láminas se cepillan en las perfiladoras, maquinas constituidas de cepillos giratorios por los cuales atraviesa la lamina capaces de extraer impurezas superficiales y dotar a la pieza de una superficie con mejor adherencia.

Posteriormente se realiza el encolado de las láminas el cual no se deberá realizar en un plazo mayor a 24 horas después de él cepillado de estas para que no haya una adherencia deficiente. El encolado se realiza mediante encoladoras de rodillos o mediante encoladoras de extrusión, capaces estas de controlar el gramaje necesario de cola que se aplica en las superficies a encolar en función de la velocidad a la que es transportada la lamina a través de estas. Estas maquinas realizan un correcto reparto de la cola. El gramaje necesario en condiciones normales es de unos 350gr/m^2 de superficie, aunque se suele aplicar alrededor de $400 - 500\text{ gr/m}^2$. Cuando se emplean sistemas de fraguado por alta frecuencia el gramaje necesario a aplicar se puede reducir a un mínimo de 200gr/m^2 (ya que este sistema es más eficiente y las uniones realizadas mediante él son de mayor calidad).

El siguiente proceso en la fabricación de elementos de M.L.E. es el armado de las láminas que a las cuales se les aplica la cola (apartado anterior). El armado se realiza aplicando una cierta presión durante un tiempo determinado y a una cierta temperatura. La presión se puede aplicar mecánica, hidráulica o neumáticamente mediante gatos o maquinas con ese fin específico. La presión ejercida se comprueba durante todo el proceso de fraguado de la cola y se corrige a medida que la madera va cediendo. El tiempo que se deberá ejercer la presión será el especificado por el fabricante de la cola para que esta fragüe correctamente y las condiciones ambientales a las que deberá estar expuesta la pieza serán de una temperatura de entorno de 20°C y de una humedad relativa no inferior al 30%.

Las piezas se arman en bastidores metálicos, uno de ellos es visible en la Imagen 1.10. Las piezas de directriz recta se arman en vertical ejerciéndoles la presión desde arriba, mientras que las piezas de directriz curva se arman apoyadas sobre un bastidor en horizontal (ver Imagen 1.11) el cual está constituido por unas escuadras que se desplazan sobre raíles o que se sitúan sobre anclajes en el suelo distribuidos en cuadrícula.



Imagen 1.10 Prensa vertical de M.L.E.

Una vez finalizado el armado, es decir cuando la cola ya ha fraguado y se cesa de ejercer la presión, el elemento estructural que ya habrá adquirido dimensiones mayores (es decir la longitud que tenían las laminas pero el canto resultante de sumar tantas laminas como conforman el elemento) se traslada a un local de condiciones ambientales idénticas al anterior donde se procederá a rectificar aquellas desigualdades que contiene. En este proceso se regruesa el elemento eliminando las cejas de las laminas y los excesos de cola y se dejan ambas caras del elemento planas.

En un siguiente proceso se mecanizan los huecos, agujeros y espacios necesarios para disponer en ellos los herrajes de anclaje que conformaran las uniones estructurales. Los herrajes que se dispondrán se realizan en un proceso paralelo pero de menor entidad a partir de chapones de acero. Dichos chapones se cortan, taladran y sueldan en función del tipo de herraje a realizar y que con anterioridad ha sido diseñado para tal fin. Los aceros utilizados para realizar los herrajes se eligen en función de la clase de ambiente a la que estará expuesto el elemento y van desde aceros cincados y galvanizados hasta aceros inoxidable (los menos utilizados).

Finalmente y antes de disponer los herrajes en los lugares indicados para tal fin se le aplica al elemento una protección fungicida, insecticida y contra los rayos ultravioletas del sol. Estas protecciones suelen ser en base a nasures y hacen que la M.L.E. pueda integrarse en cualquier ambiente y goce de mayor durabilidad ante agentes bióticos y físicos.

El proceso de fabricación explicado en las líneas anteriores está integrado en un proceso industrial que dispone de todos los sistemas de calidad exigidos por las normas establecidas para tal fin. Por ello no podría faltar indicar los ensayos de calidad que se les realizan a los elementos obtenidos durante el proceso con el fin de asegurar y así poder garantizar las exigencias que en dichas normas se especifican.



Imagen 1.11 Bastidor horizontal de M.L.E.

Lo más importante a comprobar en la fabricación de elementos de M.L.E. son las uniones encoladas realizadas. Si se quiere confiar en que el elemento y su sección transversal tendrán como mínimo la resistencia que puede otorgarle la madera se deberá comprobar que las uniones encoladas no rompan antes que las parte de madera. Para ello habrá que ensayar probetas de diferentes formas para poder analizar la resistencia media de los elementos.

El ensayo más común para verificar la unión dentada encolada es el ensayo a flexión. Se introduce parte de una lamina con una unión dentada en la maquina que ensayara dicho parte a flexión y se somete a una presión puntual hasta llegar a rotura. Posteriormente se comprueba que supera las especificaciones mínimas establecidas.

Las líneas de cola entre las láminas que conforman el elemento estructural se verifican mediante el ensayo de cizalladura. Es buena señal que la línea de rotura se encuentre en la parte de madera y no en la cola.

El tercer ensayo que se realiza pero el cual se suele encargar a laboratorios externos a la factoría de producción es el ensayo de de laminación.

Partes o rodajas de los elementos estructurales, es decir probetas que se obtienen de un elemento producido son sometidas en un corto espacio de tiempo a condiciones que equivalen a varios años de servicio a la intemperie en unos autoclaves especialmente diseñados para tal fin. Son condiciones de vacío y presión alternantes que son capaces de generar unas tensiones capaces de dar lugar a tracciones perpendiculares a las fibras suficientemente elevadas para provocar la delaminación en piezas inadecuadamente encoladas.

Terminado el ensayo se miden las longitudes abiertas de las líneas de colas sin tener en cuenta las delaminación en nudos o asociados a otros defectos. Obtenidos los resultados se verifica que dichas medidas no superan las prescripciones indicadas para poder dar la aceptación a el elemento.

1.1.5 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

En las posteriores líneas se presentan las ventajas y desventajas que presenta la M.L.E.

La estética, los aspectos tecnológicos y ambientales son características que califican a la madera laminada como uno de los materiales con las suficientes propiedades físicas, mecánicas y sismo resistente para ser aprovechado en la construcción de grandes y pequeña luces que estén en equilibrio con el medio.

La madera laminada es considerada como el mejoramiento de la madera maciza, pero no solo resalta comparada con la madera maciza ya que esta también un paso más adelantada que el acero y el hormigón gracias a sus cualidades estéticas.

A nivel de resistencia mecánica, es el proceso de encolado el responsable de aumentar hasta en un 30% la eficiencia de este material en comparación con la madera maciza.

Aunque la utilización de la madera en España es de escasa utilidad puede pensarse en un posible y próximo aumento de su uso por las ventajas que comentaremos en líneas posteriores.

Desventajas

- Requiere un riguroso cálculo estructural. Requiere de un cualificado gabinete de proyectos (ingenieros y arquitectos) para el cálculo de los elementos estructurales y las uniones.
- Requiere un alto control de calidad.
- Requiere un montaje especializado para su puesta en obra.
- El transporte de los elementos, cuando se proyectan y fabrican piezas de longitudes elevadas, es un hándicap añadido, especialmente cuando son piezas curvas. Existen limitaciones de longitud y anchura exigidas por la fase

de transporte. Es un aspecto a tener en cuenta en el diseño y cálculo de dichas estructuras.

- Es un tipo de construcción diametralmente opuesta a la acostumbrada en España como es la construcción tradicional: construcción húmeda, la gran parte de la cual se realiza in situ.
- Al ser un material compuesto, no tiene propiedades homogéneas en su sección transversal. Es decir existe cierta discontinuidad entre lámina y lámina por las propiedades diferenciadas del material que une las láminas como son las colas o adhesivos. Por esta razón es proclive a la delaminación, que es un modo de fallo de este material, y otros compuestos, y que por ello se controla intensamente.
- No tiene una alta resistencia a solicitaciones cortantes y a tensiones tangenciales.

Ventajas

1) Ventajas técnicas. En esta clasificación se anotan aquellas ventajas referentes a la tecnología ingenieril que otorga el producto de la M.L.E.:

- La respuesta ante la acción accidental de fuego:
Tiene un bajo coeficiente de conductividad térmica, como se aprecia en la Tabla 1.1, lo que hace que se mantenga sus características invariables durante mayor tiempo. Dicho coeficiente también favorece en la respuesta que el elemento tiene ante incendios, ya que el material crea capas de carbón externas que retrasan la difusión de calor hacia su interior y se transforma en una barrera térmica que actúa como aislante favoreciendo a la conservación de sus propiedades mecánicas. Ver Tabla 1.1.

Material	Coef. de Expansión térmica	Coef. de Conductividad térmica Kcal/h/m°C
Madera	5,1 E-6	0,15
Acero	10 E-6	1,15 - 1,4
Hormigón	20 E-6	35 - 55
Cobre		350

Tabla 1.1 Coeficiente de conductividad térmica de varios materiales

Esta ventaja se cumple cuando se trata de elementos estructurales de grandes escuadrías.

- La capacidad de carga en una situación de fuego es mayor en el tiempo en comparación con las estructuras de hormigón y acero. No requiere protecciones ante el fuego como requiere el acero y por tanto esto supone un importante ahorro económico.

- Se puede calcular perfectamente el tiempo durante el cual una estructura de madera podrá seguir cumpliendo con sus funciones portantes en el hipotético caso de situación de incendio.

2) Resistencia Vs Peso:

- La resistencia específica, factor que relaciona la resistencia del material con su peso es alrededor de 4 veces mayor que el del acero y 40 veces mayor que el del hormigón. Dicho de otra manera, ver en la Tabla 1.2, su relación peso/resistencia es muy baja en comparación con otros materiales. Por ello, permite realizar diseños y construir luces mayores que el hormigón, ya que con este es más complicado ejecutar por el peso propio que tiene.

Material	Peso Kg/m ³	Resistencia Kg/m ²	Peso/ Resistencia
Madera	500	400	1,25
Acero	7800	4200	1,86
Hormigón	2400	300	8

Tabla 1.2 Relación pesos resistencia

- Tiene suficiente ductilidad para permitir cierto grado de libertad a la hora de diseñar grandes luces. Por ello se destina habitualmente a la cubrición de grandes luces como pueden ser las cubiertas de piscinas, pabellones deportivos, bodegas o centros comerciales.
 - Su sismoresistencia es superior a la de cualquier tipo de construcción en acero y hormigón gracias a la rigidez que se obtiene con este material en comparación a la acción por peso propio que transmite estructuralmente; ambos conceptos muy importantes ante una respuesta sismoresistente adecuada.
- ## 3) Ventajas de producción, constructivas y de mantenimiento. En este apartado se hace referencia a las ventajas relacionadas con el proceso de fabricación y montaje de los elementos:
- Ofrece la ventaja de fabricar elementos estructurales de mayores dimensiones que los propios árboles de los que proviene. En el pasado se cosechaban árboles de mayor diámetro y largura para poder acceder a tener elementos de luces grandes y se cosechan árboles de menos calibre lo que da la ventaja de que los ciclos rotativos de crecimiento del árbol disminuyan pero no se pierda la capacidad de conseguir elementos estructurales grandes.
 - Se reduce el tiempo de secado en relación a un elemento de madera maciza por lo que además de ganar tiempo se minimizan los problemas de rajado y otros defectos reduciendo el porcentaje de descartes o rechazos del material

- Posibilidad de utilización de diferentes calidades de madera. Es posible laminar el elemento estructural de tal forma que se dispongan láminas de madera de diferentes calidades. Normalmente se dispondrá las láminas de mejor calidad en las fibras externas de la sección transversal ya que es en estos puntos donde se concentran las mayores tensiones.
- Es un material prefabricado el cual se ejecuta mediante obra en seco. De esta forma las estructuras los elementos llegan a obra listos para ejecutar y esto reduce el tiempo de ejecución. Además, al ser obra en seco aportan mayor fiabilidad puesto que no aportan humedades. Todo lo mencionado supone una garantía de control, trazabilidad y certificación.
- Presenta un bajo coste de mantenimiento; sobre todo en comparación a los metales en ambientes agresivos, especialmente aquellos expuestos a grandes concentraciones de humedades como son las piscinas cubiertas.

4) Ventajas arquitectónicas. En esta clasificación se disponen cualidades relacionadas con la estética arquitectónica y de diseño de interiores:

- El diseño de estructuras en madera tiene un componente de alto valor estético. Se pueden realizar elementos curvos mediante el proceso de curvado durante la fabricación obteniendo una variedad de formas arquitectónicas que sería muy difícil o imposible obtener con otros materiales. El grado de curvatura está limitado por el espesor de las láminas
- Los espacios en los que participa la madera son muy acogedores
- Se pueden crear elementos de sección transversal variable a lo largo de su longitud en función de la rigidez y resistencia requerida.

5) Ventajas ambientales. En este apartado se hace referencia a aspectos ambientales y de sostenibilidad que otorga la madera, que hace que este en equilibrio con su entorno:

- Alto valor sostenible gracias a que su transformación produce un bajo coste energético.
- Es un recurso renovable.
- Tiene la capacidad de almacenar carbono.
- Es reciclable.

Por último, se quieren apuntar los beneficios que ofrece el uso de la madera y de la M.L.E.

La madera se ubica como la única opción sostenible ambientalmente y económicamente ya que requiere hasta 20 veces menos energía para ser procesada que los materiales comúnmente usados (ver Figura 1.1). La madera requiere entre 8 y 30 KWH para transformar cada metro cubico frente a los 150-250 KWH que requiere el hormigón, 650 KWH que requiere el acero o 800 KWH que requiere el aluminio. Esto traducido a unidades económicas es un gran ahorro monetario.

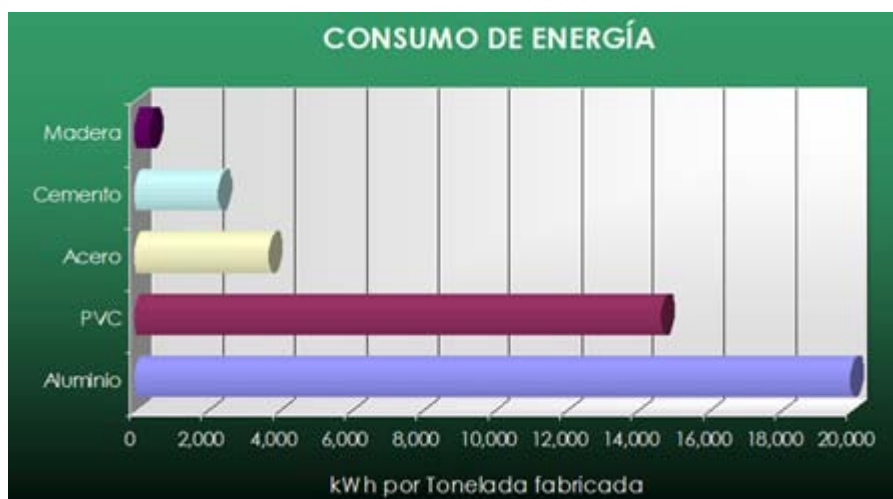


Figura 1.1 Consumo energético de diferentes materiales

Además, la contaminación producida en el proceso de producción no tiene punto de comparación con los materiales comunes de construcción. El proceso de producción de una viga de madera produce 6 kilos de gas carbónico, mientras que para una de aluminio se producen 227 kilos, para una de hormigón 101 kilo y para una de acero 74 kilos, como es visible en Figura 1.2.

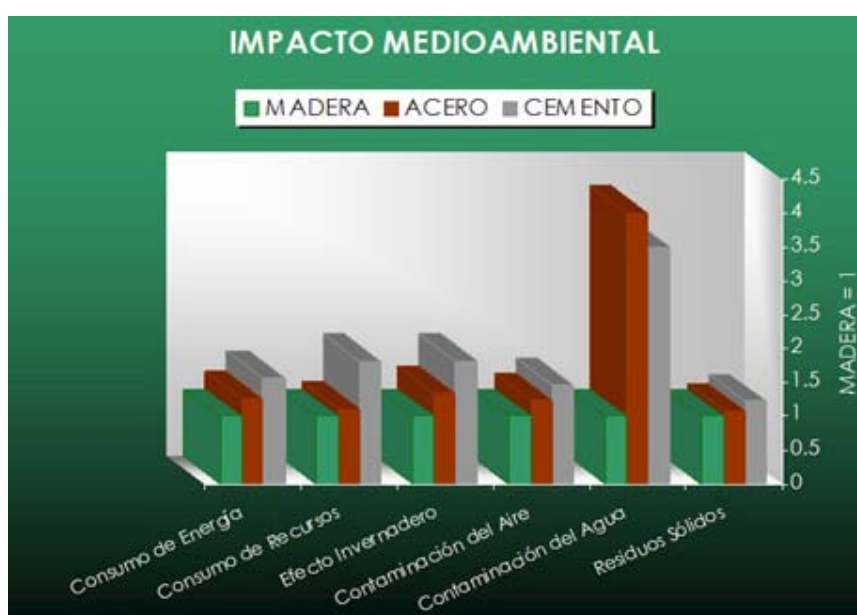


Figura 1.2 Impacto medioambiental de la madera, acero y cemento

Si a esto se le suma que es el único material totalmente renovable y altamente reciclable, que durante su vida retiene gas carbono y lo emana en pequeñas cantidades durante su fase de servicio, se puede considerar que la madera no produce contaminación y que no existe ningún material para la construcción que la supere ambientalmente. Por ello existe la creencia que la M.L.E. será en un futuro no muy lejano uno de los materiales protagonistas en la construcción de grandes obras de ingeniería y arquitectura.

1.1.6 EVOLUCIÓN, INNOVACIÓN Y APLICACIONES

En este siguiente apartado, y centrándonos en la principales ventajas que otorga el uso de la madera, mencionaremos aspectos que tienen un gran peso y un importante papel en lo que se refiere al futuro de este material como producto de construcción. También haremos referencia a la aplicación de este material, a las obras realizadas con él y otras que puede que sean la evolución de las anteriores.

En los últimos años los adelantos producidos en el sector han llevado a una continua mejoría de la M.L.E. y la aparición de otros nuevos productos derivados de la madera. Los siguientes son algunos de los adelantos que han contribuido en ello:

- Uniones de vigas mediante varillas metálicas
- Resinas especiales epoxi para la unión de madera-acero
- Aparición de tratamientos ignífugos
- Tratamientos térmicos para eliminar problemas de durabilidad
- Tratamientos y colas más respetuosos con el medio ambiente
- Paneles de fibras cruzadas para forjados y muros (OSB-3, etc.)
- Desarrollo de productos próximos a la madera laminada como son los dúos y tríos laminados, o tableros contrachapados que permiten realizar estructuras superficiales como muros y forjados completos a partir de tableros de gran formato
- Tratamientos de protección contra el riesgo de ataques de los xilófagos

APLICACIONES

En las siguientes líneas se exponen obras donde la M.L.E. tiene un papel importante para la resolución de la estructura.

Si nos remontamos a los tiempos en los que la M.L.E comenzó a utilizarse podríamos diferenciar dos obras de muy interesante valor evolutivo como son las estructuras, y que aun son visitables, del *Castillo de Montceaux en Mont-Dauphin (Hautes-Alpes)* construida por el arquitecto de la M.L.E Philibert de L'Orme y la Estación de Ferrocarril de Dieppe (en Francia) realizada por el coronel Francés Emy, que ya habíamos comentado en apartados anteriores.



Imagen 1.12 Castillo de Montceaux

El *Palacio de Ferias de Avignon* también es un ejemplo de construcción realizada con madera laminada encolada. Se realizó en 1984 y su cubierta cuenta con 24 medios arcos que se apoyan sobre un anillo circular de acero que sirve de clave de bóveda.

Hoy en día, una de las firmas de arquitectura que está a la cabeza de la proyección en M.L.E. es Michel Green Architecture. Este estudio con sedes en Vancouver y Seattle ya realizó el *Aeropuerto de Ottawa* y el *aeropuerto de Vancouver* aplicando la M.L.E. y planean construir el edificio más alto construido en madera en Canadá. Una torre de alrededor de 30 plantas (ver Imagen 1.13). En la Imagen 1.14 se puede observar las resoluciones de estructuras en altura.



Imagen 1.13

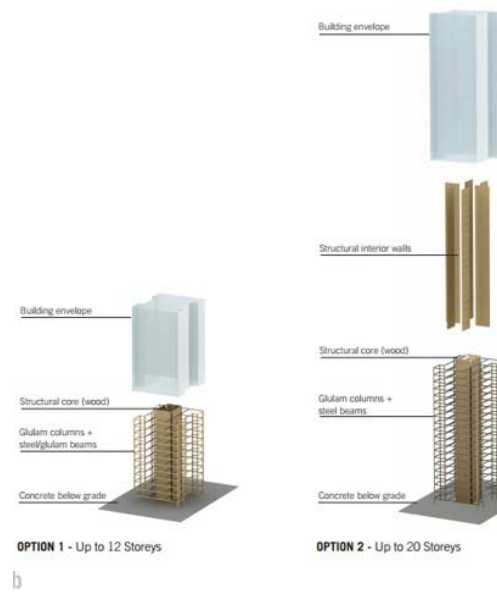


Imagen 1.14

Por otro lado la firma Inglesa Waugh Thistleton Architects ya tiene realizados proyectos como el edificio de viviendas *Murray Grove* o el edificio de viviendas *Whitmore Road* en el cercano municipio a Londres *Hackney*. Ambos fueron realizados con paneles de madera laminada para la estructura portante del edificio. El Murray Grove estuvo a la cabeza durante un tiempo siendo el edificio más alto de vivienda residencial construido en M.L.E. existente.

En Austria se propusieron realizar un edificio de estructura híbrida y así nació el *Life Cycle Tower*, Imagen 1.15. Edificio que cuenta con muros de fachada y forjado híbridos que fueron realizados industrialmente y que están compuestos de hormigón y madera. El resto de la estructura a excepción del núcleo central del edificio se construyó en madera laminada encolada.



Imagen 1.15 *Life Cycle Tower*

El *Metropol Parasol*, en Sevilla, tampoco pasa desapercibido entre las estructuras realizadas en madera. En este caso está realizada en madera microlaminada y se requirió la necesidad de realizar un programa iterativo para obtener los espesores de los distintos paneles que lo componen. Hace de parasol en la calurosa ciudad de Sevilla y destaca el diseño orgánico tan espectacular que se asemeja a una familia de hongos a gran escala (ver Imagen 1.16).



Imagen 1.16 Metropol Parasol

Por lo que puede apreciarse, los agentes del mercado de la construcción están aventurándose en mayor medida a la utilización de la M.L.E. Desde los comienzos de la utilización de la madera, en forma de rollizo, hasta los actuales sistemas industrializados de productos derivados de la madera o híbridos, pasando por los comienzos de la producción de madera laminada, ha cambiado mucho la forma de utilizarla y se han aprendido aspectos que se desconocían o que incluso algunos no apostarían que tendría, como es el buen comportamiento ante el fuego.

Una de las novedades que se le aplica a las estructuras de madera son los diseños basados en soluciones biológicas. Se conoce a la biónica como arte que estudia las soluciones biológicas que presentan diversas especies para aplicarlas en Ingeniería y Arquitectura. Sumándole a esto la versatilidad estética y la adaptabilidad que otorga la madera laminada y otros productos derivados de la madera, en comparación con productos constructivos más tradicionales, no es de extrañar que los productos de madera vayan unidos a la arquitectura orgánica y a arte de la biónica.

Es este sentido diferentes sistemas constructivos en madera posibilitarán la creación de estructuras orgánicas que simulen formas naturales las cuales no seguirán las reglas cartesianas del espacio ni la verticalidad propia de la gravedad terrestre. Como ya comentábamos la naturaleza, como optimizadora de recursos, es la que mejor enseña a construir estructuras orgánicas mediante la aplicación de soluciones biológicas a la técnica de los sistemas de arquitectura e ingeniería, y así permitir aprovechar millones de años de evolución y selección natural. Numerosos seres vivos han desarrollado estructuras ultraligeras de gran resistencia inspirados en formas naturales. Inspirándose en ellos y en formas naturales la biónica junto con la arquitectura orgánica promueve la armonía entre el hábitat humano y el mundo natural.

Los árboles son unos de esos seres vivos donde las células de polímeros, como la celulosa y la lignina, se han complementado para dar como resultado una estructura biológica de gran resistencia y bajo peso. Así surge un material, la madera, que posee las mejores características para el uso estructural gracias a que el factor de resistencia en relación a su peso es superior al de otros materiales convencionales.

Siguiendo el camino planteado, AIDIMA (Instituto Tecnológico del Mueble, Madera, Embalajes, y Afines) está dentro del proyecto IMPIVA en el que se desarrollan sistemas mixtos de madera laminada y vidrio para estructuras ligeras de cubierta como el visible en la Imagen 1.17. Este sistema, como otros paralelos, aparece como el resultado de numerosas innovaciones surgidas en la proyección estructural. Aun y teniendo, la madera y el vidrio, características opuestas, si se equilibran las posibilidades de cada uno se logra un balance muy interesante. Junto con ese sistema han aparecido otros para la realización de láminas y estructuras espaciales muy interesantes que tienen como una de sus aplicaciones directas la simulación de formas naturales para dar soluciones biológicas al conjunto estructural.

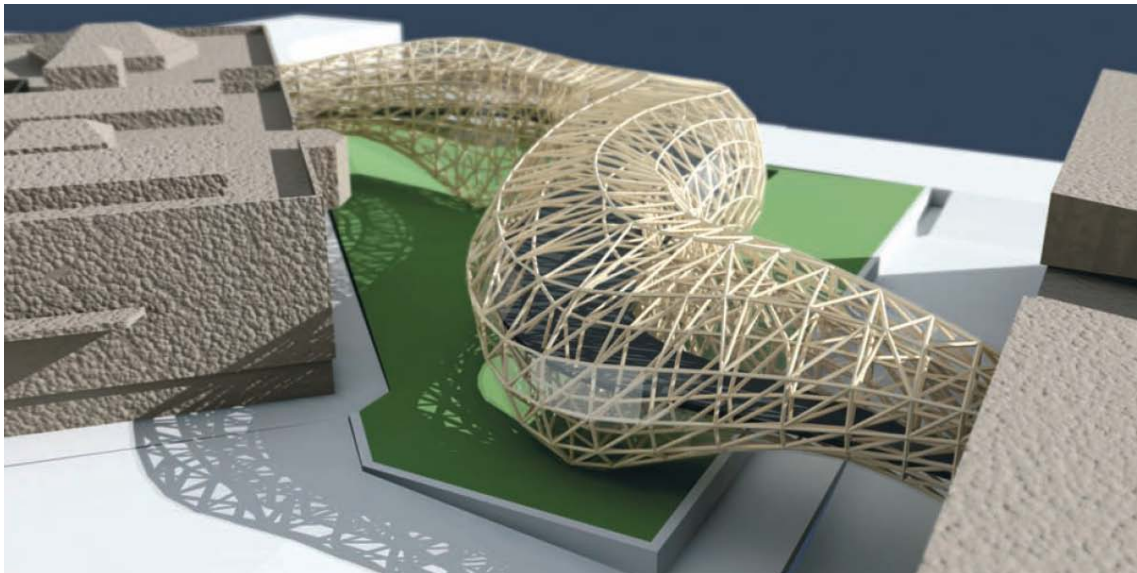


Imagen 1.17 Sistema constructivo madera-vidrio

El método de cálculo estructural elegido para los entramados de madera laminada, vidrio o chapa ha sido el de los elementos finitos; este método es un método numérico y su uso se aplica para dar solución a ecuaciones diferenciales parciales en el ámbito de la ingeniería y la física entre otros. Para su aplicación se siguen los siguientes pasos:

- 1) Se parte de una superficie compuesta por dos planos triangulares conectados que tienen un tamaño cualquiera surgido por la necesidad del diseño arquitectónico.
- 2) Partiendo de esta geometría se procede a calcular las tensiones que la superficie de vidrio va a soportar por medio del programa de elementos finitos para obtener la subdivisión mínima de triángulos que se precisan para cumplir con la estática.

- 3) Se procede a depurar los resultados para estudiar si es necesario aumentar la subdivisión. Este aumento de subdivisión podría venir requerido por los formatos de vidrio viable para su colocación o por su precio, como ejemplo.
- 4) Una vez encontrada la subdivisión final se procede al dimensionamiento exacto de las piezas de madera que servirán de sostén al paño de vidrio.

La modelización y el cálculo mediante la aplicación del método de los elementos finitos se realizan con elementos tipo barra y lamina.

Todo esto quiere servir para que surja un aumento de la cantidad de materiales derivados de la madera utilizados en la construcción de edificios y viviendas para que dé lugar a un ambiente de vida más sostenible y una mayor calidad de vida para los ciudadanos del mundo.

1.2 NORMATIVA

Desde hace años que se está realizando un esfuerzo hacia el avance normativo para el cálculo de estructuras de madera, el uso de esta en la construcción, su puesta en obra, y en lo referente a la protección ante diversos agentes como son los ataques por xilófagos (de tipo biológico), el comportamiento ante el fuego o el agua (de tipo físico).

La entrada en vigor de la LOE (Ley de Ordenación de la Edificación) y el Código Técnico de la Edificación es un momento especial e interesante en el cual por primera vez se dispone un marco normativo que sitúa a la madera estructural en igualdad de condiciones frente a otros materiales. Por otro lado la creciente demanda de la madera estructural en el mercado está haciendo muy necesaria una actualización para dar respuesta a los retos planteados por el CTE. En esa dirección las empresas, los profesionales, las instituciones, personas dedicadas a la docencia e investigadores han incrementado su dedicación para satisfacer las demandas tecnológicas del sector maderero.

Con intención de resumir dicha situación y el panorama normativo de la actividad a nivel nacional se redactan las siguientes líneas. La entrada en vigor de la LOE en 1999 y su posterior modificación del 2001 fue orientada a resolver las necesidades relacionadas con la calidad en la edificación, y una de las consecuencias inmediatas son una serie de garantías que hay que satisfacer con carácter obligatorio por los diferentes agentes intervinientes en el proceso de la edificación. De esta forma nacieron los seguros anual, trienal y decenal, este ultimo para garantizar los requisitos relativos a la estructura.

Del mismo modo era necesaria la implantación desde un punto de vista normativo un código de obligado cumplimiento donde se recogieran las condiciones y métodos que deben reunir las edificaciones para satisfacer las prestaciones mínimas que exigía la LOE. Dichas prestaciones mínimas están relacionadas con los requisitos esenciales que son:

- Seguridad estructural. Requisito directamente relacionado con los elementos que son objeto de análisis en el presente trabajo.
- Seguridad contra incendios. Requisito directamente relacionado con los elementos que son objeto de análisis en el presente trabajo.
- Seguridad de utilización
- Salubridad
- Protección contra el ruido
- Ahorro de energía

Del mismo modo que los elementos objetos de este trabajo, las estructuras realizadas en M.L.E., deben satisfacer estos requisitos, los procesos y los productos utilizados para su elaboración deben satisfacer unos requisitos para satisfacer las prestaciones mínimas impuestas en la LOE. La Directiva de Productos para la Construcción recoge y obliga a que los productos de manera que se incorporen permanentemente a la construcción deberán tener un sistema de certificación que los relacione con los mismos requisitos esenciales definidos en el CTE. Estos sistemas se están implantando progresivamente en los diferentes sectores y materiales con la finalidad última de que todos los productos obtengan el marcado CE.

Resumiendo, todas las estructuras realizadas, en consecuencia las estructuras realizadas con elemento de M.L.E., deberán satisfacer por un lado los requisitos exigidos por el CTE, en lo que se refiere al diseño, cálculo y prestaciones que debe otorgar la estructura ; y por otro los requisitos exigidos por las normativas de productos de construcción, enmarcadas en la Directiva Europea de Productos para la Construcción, en lo que se refiere a la adecuación de un material, proceso y producto que se vaya a incorporar a dicha estructura.

Los Euro-Códigos realizan un papel similar a lo que en España realiza el CTE pero en el ámbito Europeo, y precisamente el EuroCódigo-5 centrándose en las estructuras realizadas con madera estructural.

Las normas y textos aplicables a los productos de construcción en ámbito europeo y que siguen vigentes se denominan EN- y deben ser adoptadas bajo mínimos por los países de la Comunidad Europea pudiendo cada país establecer exigencias más restrictivas al respecto. En España se denominan UNE-EN- o UNE- en el caso que no hay sido adaptada al Marco Europeo. En apartados posteriores haremos una relación de las más importantes en el ámbito de la M.L.E.

El producto derivado de la madera con mayor implantación estructural es la M.L.E. Existen en el mercado productos más recientes como son los dúos y tríos, que ofrecen productos de estética similar a la madera aserrada pero con las garantías de un

producto industrializado, y la madera contralaminada, que con su formato y versatilidad ofrece un abanico de posibilidades muy amplio e interesante en el diseño arquitectónico.

Hace unos años, en España, se comenzó la carrera por centrar la implantación de certificados de calidad, como son los Sellos de Calidad de AITIM (Asociación de Investigación Técnica de las Industrias de la Madera) para ya en la actualidad transformarse en el mercado CE obligatorio. Para la M.L.E. el mercado CE es obligatorio desde el año 2010 y para los productos de madera más novedosos la implantación es más lenta porque se está trabajando en las normas y documentos que las regularan.

De la misma forma que los sellos AITIM en España, en Francia tenemos el Acerbois Glulam y en Alemania el MPA. Mediante estos sellos además de inspecciones periódicas para el control de fábrica y de los ensayos internos de control, se toman muestras periódicas para su ensayo en laboratorios acreditados y externos a la fábrica. Principalmente el control de calidad del producto se basa en controlar la clasificación de las láminas, auditar las condiciones ambientales en la zona de prensado y evaluar el cumplimiento de los requisitos de encolado prescritos por el fabricante de adhesivos y por la norma de fabricación. Por otro lado, los ensayos de control periódicos se centran en comprobar la idoneidad del encolado a través de ensayos específicos de cortante, delaminación y flexión en las uniones dentadas.

La ya no vigente norma UNE-EN 386 fue el resultado del trabajo realizado sobre la calidad del encolado de especies españolas para la fabricación de madera laminada encolada, que durante los años 80 se realizaron paralelamente a la aparición de la norma Europea. Algunas iniciativas Españolas en este campo fueron encaminadas a la utilización de maderas autóctonas españolas como son el pino radiata (País Vasco), el eucalipto rojo (Galicia), el pino piñonero (Andalucía), el castaño (Asturias) o el roble procedente del norte peninsular.

Por concluir, decir que los campos que concentran mayores esfuerzos son los de caracterización de los productos de madera para uso estructural, el control de calidad, la certificación de productos y los orientados a la búsqueda de soluciones y herramientas para la intervención en estructuras existentes de madera.

NORMAS DE EDIFICACIÓN

La norma que en España es de obligado cumplimiento y que se asemeja al Eurocodigo-5 es el DB SE-M (Documento Básico de Seguridad estructural. Madera) integrado en el CTE. Mediante el cumplimiento de este documento básico se cumplen los requisitos establecidos en la LOE y también se verifica la seguridad de los elementos estructurales de madera en edificación.

Por otra parte, y aunque tienen normas específicas, el CTE también trata los aspectos relativos a la fabricación, montaje y control de calidad, conservación y mantenimiento a la vez que indica las exigencias necesarias. En el anejo I vienen recogidas las normas que reflejan todos estos aspectos mencionados y otros secundarios. Estas normas son las UNE, UNE-EN y UNE-ENV.

NORMAS DE FABRICACIÓN

UNE-EN 14080—Estructuras de madera. Madera laminada encolada.

Es la norma que regula el marcado CE de este producto. En ella se indica las condiciones que debe cumplir la fábrica, fundamentalmente, los ensayos a realizar y los controles internos a realizar por el fabricante para poder conseguir el marcado CE. Esta norma anula a otras que hasta la fecha de entrada en vigor regulaban este mercado, que son las siguientes. En ese sentido era preciso recoger en la actual norma todos los aspectos, ya que había un número muy grande de ellas.

UNE-EN 386--Madera laminada encolada. Especificaciones y Requisitos del Fabricante.

Es la norma fundamental de la M.L.E. y recogía las especificaciones técnicas del material, condiciones de fabricación a cumplir en la planta de producción, control interno de fabricación a realizar por el fabricante y ensayos a aplicar para el control del producto. Es la base de los sellos AITIM y Acerbois Glulam. El sello Alemán MPA está basado en la norma alemana que es muy próxima a la europea.

UNE-EN 387—Madera laminada encolada. Empalmes mediante uniones dentadas de grandes dimensiones. Especificaciones y requisitos mínimos de fabricación.

UNE-EN 390—Madera laminada encolada. Dimensiones y tolerancias.

UNE-EN 391—Madera laminada encolada. Ensayo de delaminación de línea de adhesivo.

UNE-EN 392—Madera laminada encolada. Ensayo de esfuerzo cortante en línea de adhesivo.

UNE-EN 1194—Estructuras de madera. Madera laminada encolada. Clases resistentes y determinación de los valores característicos.

UNE-EN 301—Adhesivos fenólicos y aminoplásticos para estructuras de madera bajo carga. Clasificación y requisitos de comportamiento.

DIN 1052—

Aunque no se trate de una norma española o europea ha sido un tradicional texto de referencia para el sector.

1.2.1 ASPECTOS TÉCNICOS Y CÁLCULO

Aspectos técnicos de la madera estructural

En las líneas posteriores se pretenden recoger los que son los aspectos técnicos más destacados y diferentes que definen a la madera como material estructural.

1) Bajo modulo de elasticidad:

- $E_M = E_C / 2$
- $E_M = E_a / 20$

2) Propiedades mecánicas:

La madera maciza es un material ortótropo. Es decir no tiene las mismas propiedades en todas las direcciones del material como lo podría tener el acero que es un material isótropo. Esta propiedad reside en las características moleculares de cada material. Al estar la madera formada por células traqueideas que tienen la forma alargada (2-5 mm de largo y 10-50 micras de diámetro) tiene propiedades y respuestas diferentes en función de la dirección.

Por ello se diferencian tres planos de simetría en la madera maciza:

El plano transversal (perpendicular al eje longitudinal de la pieza), el plano radial (paralelo al eje longitudinal de la pieza y que pasa por el centro) y el tangencial (paralelo al eje longitudinal pero que no pasa por el centro).

Teniendo en cuenta lo dicho en líneas anteriores, el material tendrá propiedades diferentes en función de la orientación de las fibras o de otro modo dicho en función del plano de simetría que consideremos. Los planos de simetría elástica mencionados son perpendiculares entre si y por ello se definen 12 constantes elásticas: 3 módulos elásticos longitudinales "E", 3 módulos elásticos transversales "G" y 6 coeficientes de Poisson "v" que se pueden reducir a 9 constantes elásticas por las relaciones que existen entre sí.

Por su ortotropía se pueden diferenciar como mínimo 2 direcciones principales: la dirección paralela a la fibra y la dirección perpendicular a la fibra; que darán valores característicos de resistencia diferente para cada dirección. Así se recogen que tenemos los valores característicos de:

- Tracción paralela a la fibra
- Compresión paralela a la fibra
- Tracción perpendicular a la fibra
- Compresión perpendicular a la fibra
- Flexión
- Cortante

Hay que recordar que las propiedades mecánicas a las que nos referimos son el fruto de la eficacia de trabajo del árbol durante su vida útil. Generalmente aguanta esfuerzos de flexión debidos al viento y esfuerzos de compresión debidos a su peso propio; se catalogan sus propiedades como,

Buenas propiedades a:

- Flexión
- Compresión paralela a la fibra
- Tracción paralela a la fibra

Malas propiedades a:

- A cortante
- Compresión perpendicular a la fibra
- Tracción perpendicular a la fibra

En lo que se refiere al modulo de elasticidad, tenemos que:

- Modulo de elasticidad paralelo a la fibra: $E_0 = 7000 - 12000 \text{ N/mm}^2$
- Modulo de elasticidad perpendicular a la f.: $E_{90} = E_0/30$
- Modulo transversal o de cortante: $G = E_0/16$

Se ha de apuntar que el E bajo incide en las deformaciones y pandeo que pueda sufrir la pieza y que el G bajo incide en las deformaciones por cortante.

En la Figura 1.3 se puede ver el efecto de la compresión perpendicular a la fibra y las consecuencias que acarrea dicho efecto como es el aplastamiento de la pieza y la no linealidad de la tensión-deformación.

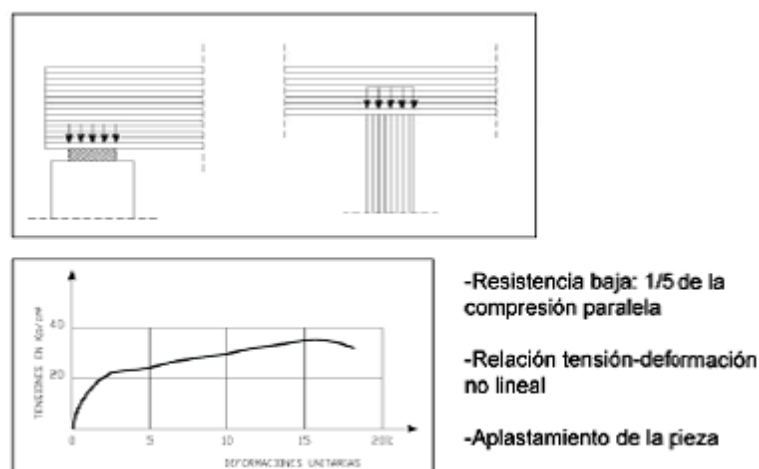


Figura 1.3 Presiones perpendiculares en la madera

En comparación, en la Figura 1.4 se puede observar como la tracción perpendicular a la pieza tiene una resistencia mucho menor a lo que puede tener la resistencia perpendicular a compresión y se ilustran algunos de los casos en los que se puede dar.

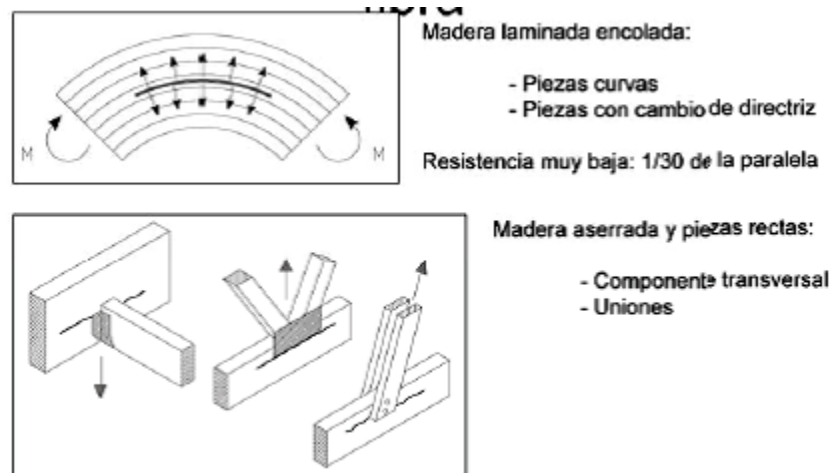
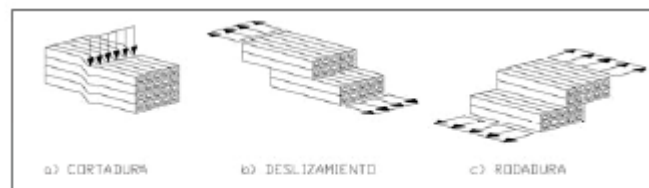


Figura 1.4 Tracción perpendicular en la madera

Por último, en la Figura 1.5 se aprecia los diferentes modos de fallo causados por la baja resistencia a cortante y de qué forma se producen.



Tensiones tangenciales en la madera:

- Cizalladura de fibras, τ_{xy} (cortadura)
- Deslizamiento de fibras, τ_{yx} (rasante)
- Rodadura de fibras, τ_{yz} (rodadura)

Figura 1.5 Baja resistencia a cortante de la madera

Además hay que decir que la madera depende mucho de las condiciones de humedad y de las discontinuidades que contiene. Por ello la norma establece tres clase de servicio en función de las condiciones ambientales a las que se expone el elemento durante el servicio (condiciones relacionadas con la humedad y la temperatura) y unas clases de usos las cuales tienen más relación con la durabilidad, la exposición o probabilidad de ataque por agentes bióticos, principalmente por el grado de humedad que alcance durante su vida en servicio. Existen 5 clases de uso de las que se derivan las necesidades de aplicar una u otra protección a los elementos.

Por último, la madera tiene un bajo coeficiente de térmico que le permite reaccionar favorablemente ante el fuego. Al no transmitir el calor bien, el elemento

queda afectado parcialmente por la subida de temperatura y pierde propiedades en un punto exacto. Además se crea una capa de carbón, a la vez que pierde sección, que le ofrece a la sección reducida una protección y ralentiza la pérdida de sección. Por ello cuando las escuadrías son grandes esto permite ganar tiempo suficiente para evacuar a la gente y que la estructura no colapse antes de ello. En cambio si la escuadría es pequeña, el elemento se quedara con una sección eficaz muy reducida que no soportara las cargas.

UNIONES

Las uniones son en el diseño y calculo estructural uno de los aspecto más relevantes, no lo iban a ser menos en las estructuras realizadas de M.L.E. En este caso específico en las uniones se producen las concentraciones de tensiones y la concentración de esfuerzos. Estos efectos pueden venir agravadas por situaciones en las que la sección de la pieza puede encontrarse reducida, pueden existir mecanizados, pueden aparecer componentes perpendiculares a la fibra, o concurrir diferentes piezas en el mismo plano y que los ejes no estén alineados, etc.

Lo anteriormente explicado contribuye a que los mayores esfuerzos ingenieriles se destinen a la correcta resolución y diseño de las uniones. No es extraño, que por la tipología estructural, en madera, se tienda a soluciones estructurales isostáticas y por lo tanto a uniones articuladas; sin embargo también existen sistemas que permiten ejecutar uniones rígidas. Las uniones tradicionales, denominadas carpinteras, transmiten los esfuerzos principalmente por contacto directo entre superficies y por esto las uniones son necesariamente articuladas.

Las posibilidades que actualmente ofrece el diseño asistido por ordenador y la fabricación mediante control numérico permiten la recuperación de las uniones y sistemas tradicionales con altos niveles de ejecución. En contraposición los nuevos diseños recurren a sistemas de unión basados en elementos metálicos tipo clavija como son los pasadores, pernos, tirafondos o de superficie como son las placas clavo y los conectores de anillo.

Estos últimos, los elementos metálicos, también aportan soluciones isostáticas, a no ser que estén actuando en grupo y estén específicamente diseñados para transmitir momentos flectores. Para finalizar decir que están siendo exploradas posibilidades para realizar uniones rígidas mediante sistemas de encolado directo de piezas de madera, mediante varilla o mediante placas de otros materiales, y que están siendo aplicadas como refuerzo o sustitución de piezas de madera en estructuras existentes

Como mencionamos anteriormente las laminas de madera laminada se disponen paralelas entre si y paralelas también a la directriz del elemento. Al ser esto así se pueden disponer las láminas disponiendo las líneas de encolado de forma horizontal o vertical.

En la laminación vertical los planos de laminación son paralelos a las cargas actuantes en la pieza y por tanto los encolados de canto son fundamentales ya que absorben los esfuerzos tangenciales. En la laminación horizontal los planos de laminación son perpendiculares a las cargas actuantes y las uniones de canto no son de tanta importancia (ver Imagen 1.18 e Imagen 1.19)

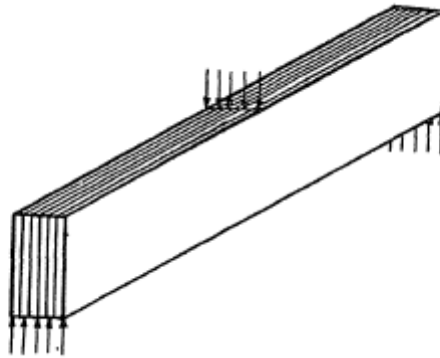


Imagen 1.18 Laminación vertical

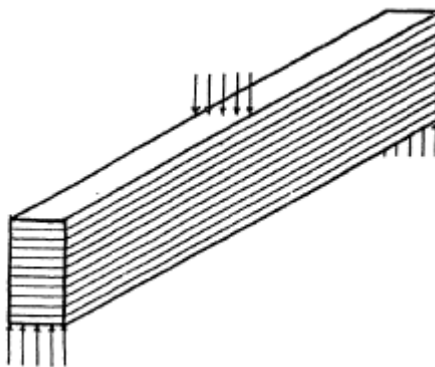


Imagen 1.19 Laminación horizontal

1.2.2 MADERA LAMINADA ENCOLADA

En lo que se refiere a la M.L.E., el producto principal es la madera maciza, como ya hemos podido apreciar en el apartado sobre el proceso de fabricación. Además, podríamos asegurar, que muchas propiedades de la madera maciza son mejoradas mediante el proceso de fabricación. La resistencia puede llegar a incrementarse en un 30%, entre otras cosas.

La formación de elementos de M.L.E. tiene que cumplir unos requisitos que la norma establece. Las laminas vienen limitadas en función de la clase de servicio y deben oscilar entre los 20 – 45 mm para el espesor y acotarse a 60 – 100 mm² para las secciones. Estos parámetros están acotados en la norma de fabricación en función de la clase de servicio y de la especie arbórea de la que se trate.

Del mismo modo las secciones estructurales suelen ser muy esbeltas con relaciones de 1:5 – 1:8 para la estructura principal y de 1:2 – 1:3,5 para los elementos secundarios. Los anchos habituales se encuentran entre 11 – 22 cm y entre 9 – 16 cm para cada caso.

La unión de las láminas se realiza mediante colas, mediante las cuales se produce una unión molecular entre los conductos fibrosos y estas. Existe una afinidad entre la madera y las colas, mediante las cuales se produce una soldadura (unión mecánica) que se considera de fuerza superior a la de la madera maciza. Además este proceso produce una estabilización de la madera al neutralizar las tensiones internas.

Las colas usadas para tal uso han ido evolucionando con el tiempo. En un principio era habitual utilizar la caseína (cola de carpintero) y la urea formol, que dejaron el paso a otras como la Resorcina fenol formol (RFF, ya en desuso) y la Melamina Urea Formol (MUF) que no tiene problemas ambientales ya que carece de fenoles.

Factor de altura. En ensayos se ha podido observar que cuanto mayor es el canto de la sección sometida a flexión el valor de rotura era inferior. Una suposición que se realiza es que existe una ayuda de las fibras cercanas al eje neutro que restringe el pandeo de las fibras comprimidas del borde de la sección. Esta ayuda será más efectiva cuanto menor sea el canto de la pieza.

Para el cálculo de la resistencia a compresión pasa algo parecido en cuanto a pandeo en función de la esbeltez mecánica de la pieza.

La estabilidad lateral (pandeo lateral) es tratada mediante limitaciones las cuales no precisa comprobación mientras no sobrepase unas limitaciones de esbeltez máxima.

(Las normas británicas y americanas en este artículo recogidas no sé si están vigentes. Ahora CTE DB-SE-M y Euro-Código) (El estado del arte debería de hacer referencia a los cambios que han surgido en normativa)

Al ser un material compuesto, tiene el inconveniente de no tener propiedades homogéneas a lo largo y ancho de su sección y longitud. Esta característica de

propiedades discontinuas tiene diferencias en comparación con un material macizo. Una de ellas es el posible modo de fallo por delaminación, común en materiales compuestos. La delaminación es la distorsión o desplazamiento relativo que se produce entre las láminas encoladas. Depende en gran medida de las propiedades que tiene el material de adhesión (la cola) que une las láminas y está directamente relacionado con las tracciones perpendiculares a las láminas que surgen por la solicitación cortante.

1.2.3 CÁLCULO Y VERIFICACIÓN (CTE DB-SE-M)

Los posibles enfoques para llevar a cabo el cálculo de estructuras de madera son el enfoque de los E. Límites y el enfoque (más antiguo) de las Tensiones Admisibles.

El primero de los dos, el de los Estados Límite, ha sido ya adoptado por diversos materiales y básicamente pretende calcular la resistencia última considerando unas cargas mayoradas y unas resistencias minoradas sobre los valores característicos. Ofrece la ventaja de considerar todos los aspectos de diseño de forma ordenada y racional, y facilita uniformidad de criterios de seguridad para materiales diferentes.

El segundo enfoque, el de las tensiones admisibles, consiste en obtener las tensiones a las que se ve sometida la estructura bajo unas determinadas solicitaciones para compararlas con las tensiones admisibles aceptables. Este método está dejando de utilizarse ya que presenta evidentes desventajas para determinar la seguridad de la estructura.

ESTADOS LÍMITE

Los objetivos de este método es establecer un acuerdo entre los comités nacionales e internacionales responsables de las normativas para asegurar una calidad razonable en lo referente al cálculo y ejecución de la estructura. El Consejo Internacional de la Construcción (CIB, Conseil International du Batiment) aconseja el uso de este método, que es aplicable al cálculo de estructuras de madera aserrada, madera laminada y productos derivados de la madera o que la contengan. Por esta razón en el presente trabajo solo se explicará el presente método.

Los valores característicos serán aquellos que no sean inferiores en el 95% de los casos y que sean aplicables en ensayo (con probetas de pequeñas dimensiones y sin defectos) durante entre 3 y 5 minutos a una temperatura de $20^{\circ}\text{C} \pm 3^{\circ}\text{C}$ y una humedad relativa de $65 \pm 2\%$.

Los valores medios, referentes a las propiedades elásticas del material, se definen como valores medios en las mismas condiciones de temperatura, humedad y duración que los valores característicos.

Las acciones se clasifican según su duración (sea permanente, variable, accidental,...) y se combinan entre ellas para analizar que combinación ofrece la situación más

desfavorable. Estas acciones, para cada combinación, son mayoradas por un factor que depende del tipo de carga y también están afectadas por un coeficiente de combinación que tiene en la duración de la carga y la clase de servicio del elemento. También se tienen en cuenta la simultaneidad de las acciones.

De forma inversa a como se obtienen las acciones, las resistencias de cálculo se minoran en función del estado limite en el que estemos. Si estamos verificando el E.L.Ultimo (referentes a rotura de secciones críticas, inestabilidad general de la estructura, pandeo o fatiga) se adoptara el valor adecuado, mientras que si estamos verificando E.L.Servicio (referente a la deformación, Fisuración, o vibraciones) siempre se deberá coger un valor de minoración igual a 1.

Los valores característicos de las resistencias son estándares y se denominan "clases resistentes (SC "Strength clases" en ingles)". Desde siempre, los elementos estructurales se han clasificado visualmente en función de los defectos que contenían, aunque en la actualidad existe la posibilidad de clasificarlas mecánicamente, método que tiende a imponerse en el mercado por su mayor fiabilidad.

Entre los estándares de resistencia se diferencia las clases resistentes para la madera aserrada que se denomina como SC y las clases resistentes para la madera laminada SCL (Strength Classes Laminated) o GL (Glued Laminated). La clase resistente de un elemento clasificado visualmente viene caracterizada por sus defecto (como nudos, fendas y bolsas de resina) que determinaran una f_m (Flexión media) y E_0 (Modulo de Elasticidad a Flexión). Un elemento pertenecerá a la clase resistent para la cual sus valores de f_m y E_0 no sean inferiores para los estándares establecidos para cada clase. En los casos de piezas clasificadas mecánicamente además tendrá que cumplir que su f_{t0} (Resistencia característica a tracción paralela a la fibra) no sea tampoco inferior a la establecida para esa clase.

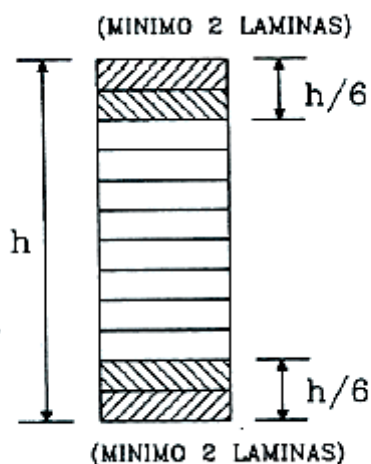


Imagen 1.20 Laminación compuesta de la M.L.E.

Para los elementos laminados se aplica el mismo procedimiento si el elemento está compuesto únicamente de una sola especie de madera. En el caso de no estarlo deberá además cumplir las limitaciones establecidas de los valores de f_{t0} . En la Imagen 1.20 se puede apreciar el mínimo de láminas a disponer en la realización de un elemento de M.L.E. combinado y en la siguiente Figura 1.6 se adjunta la Tabla del anejo D del DB-SE-M de correspondencias entre Clases Resistentes.

	Clases resistentes		
	GL24h	GL28h	GL32h
Madera laminada encolada homogénea			
- Todas las láminas	C24	C30	C40
Madera laminada encolada combinada			
- Láminas externas ⁽¹⁾	C24	C30	C40
- Láminas internas	C18	C24	C30

⁽¹⁾ Los requisitos se aplican al sexto del canto extremo de cada lado con un mínimo de 2 láminas.

Figura 1.6 Tabla D2 sobre Correspondencia entre Clases Resistentes de madera laminada encolada y madera laminada aserrada

De esta forma lo expresa el anejo E del DB-SE-M en el que aparece las siguientes tablas visibles en la Figura 1.7 y Figura 1.8 indicando los valores característicos de las propiedades asociados a cada Clase Resistente, sea un elemento de de M.L.E. homogénea o un elemento de M.L.E. combinada.

Propiedades		Clase Resistente			
		GL24h	GL28h	GL32h	GL36h
Resistencia (característica), en N/mm²					
- Flexión	$f_{m,g,k}$	24	28	32	36
- Tracción paralela	$f_{t0,g,k}$	16,5	19,5	22,5	26
- Tracción perpendicular	$f_{t90,g,k}$	0,4	0,45	0,5	0,6
- Compresión paralela	$f_{c0,g,k}$	24	26,5	29	31
- Compresión perpendicular	$f_{c90,g,k}$	2,7	3,0	3,3	3,6
- Cortante	$f_{v,g,k}$	2,7	3,2	3,8	4,3
Rigidez, en kN/mm²					
- Módulo de elasticidad paralelo medio	$E_{0,g,medio}$	11,6	12,6	13,7	14,7
- Módulo de elasticidad paralelo 5 ^o -percentil	$E_{0,g,k}$	9,4	10,2	11,1	11,9
- Módulo de elasticidad perpendicular medio	$E_{90,g,medio}$	0,39	0,42	0,46	0,49
- Módulo transversal medio	$G_{g,medio}$	0,72	0,78	0,85	0,91
Densidad, en kg/m³					
Densidad característica	$\rho_{g,k}$	380	410	430	450

Figura 1.7 Tabla E3 Madera laminada encolada homogénea

Propiedades		Clase Resistente			
		GL24c	GL28c	GL32c	GL36c
Resistencia (característica), en N/mm²					
- Flexión	$f_{m,g,k}$	24	28	32	36
- Tracción paralela	$f_{t0,g,k}$	14	16,5	19,5	22,5
- Tracción perpendicular	$f_{t90,g,k}$	0,35	0,4	0,45	0,5
- Compresión paralela	$f_{c0,g,k}$	21	24	26,5	29
- Compresión perpendicular	$f_{c90,g,k}$	2,4	2,7	3,0	3,3
- Cortante	$f_{v,g,k}$	2,2	2,7	3,2	3,8
Rigidez, en kN/mm²					
- Módulo de elasticidad paralelo medio	$E_{0,g,medio}$	11,6	12,6	13,7	14,7
- Módulo de elasticidad paralelo 5 ^o -percentil	$E_{0,g,k}$	9,4	10,2	11,1	11,9
- Módulo de elasticidad perpendicular medio	$E_{90,g,medio}$	0,32	0,39	0,42	0,46
- Módulo transversal medio	$G_{g,medio}$	0,59	0,72	0,78	0,85
Densidad, en kg/m³					
- Densidad característica	$\rho_{g,k}$	350	380	410	430

Figura 1.8 Tabla E4 Madera laminada encolada combinada

Además, los valores característicos serán modificados por factores de modificación en función de la duración de las acciones y la Clase Servicio a la que estén sometidos los elementos estructurales. Dichas Clases de Servicio vienen definidas textualmente en el apartado 2.2.2.2 del DB-SE-M como:

- *Clase de Servicio 1. Se caracteriza por un contenido de humedad en la madera correspondiente a una temperatura de $20 \pm 2^{\circ}\text{C}$ y una humedad relativa del aire que solo exceda del 65% unas pocas semanas al año. Se encuentran en esta clase las estructuras de madera expuestas a un ambiente interior.*
- *Clase de Servicio 2. Se caracteriza por un contenido de humedad en la madera correspondiente a una temperatura de $20 \pm 2^{\circ}\text{C}$ y una humedad relativa del aire que solo exceda del 85% unas pocas semanas al año. Se encuentran en esta clase las estructuras de madera expuestas a un ambiente exterior pero cubiertas como es el caso de cobertizos y viseras, y las piscinas cubiertas debido al ambiente húmedo en el que se encuentran.*
- *Clase de Servicio 3. Condiciones ambientales que conduzcan a contenido de humedad superior al de la Clase de Servicio 2. Se encuentran en esta clase las estructuras de madera expuestas a un ambiente exterior sin cubrir.*

En función de la Clase de Servicio y de la duración de la carga se obtendrá el valor de cálculo a partir de los valores característicos de las propiedades definidas para cada Clase Resistente. La expresión (1) utilizada para tal fin es la recogida en el apartado 2.2.3 del DB-SE-M en la que tiene un papel fundamental el mencionado factor de modificación recogido en la Tabla 2.4, visible en Figura 1.10 , siguiente (establecida también en el mismo apartado).

$$X_d = k_{\text{mod}} \cdot \left(\frac{X_k}{\gamma_M} \right) \quad (1)$$

X_k	valor característico de la propiedad del material
γ_M	coeficiente parcial de seguridad para la propiedad del material (Figura 1.9)
k_{mod}	factor de modificación

Situaciones persistentes y transitorias:	
- Madera maciza	1,30
- Madera laminada encolada	1,25
- Madera microlaminada, tablero contrachapado, tablero de virutas orientadas	1,20
- Tablero de partículas y tableros de fibras (duros, medios, densidad media, blandos)	1,30
- Uniones	1,30
- Placas clavo	1,25
Situaciones extraordinarias:	1,0

Figura 1.9 Tabla 2.3 Coeficientes parciales de seguridad para la madera yM

Material	Norma	Clase de servicio	Clase de duración de la carga				
			Permanente	Larga	Media	Corta	Instantánea
Madera maciza	UNE-EN 14081-1	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Madera laminada encolada	UNE-EN 14080	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Madera microlaminada	UNE-EN 14374, UNE-EN 14279	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Tablero contrachapado	UNE-EN 636						
	Tipo EN 636-1,2 y 3	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
	Tipo EN 636-2 y 3	2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
Tablero de virutas orientadas (OSB) ¹	Tipo EN 636-3	3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
	UNE-EN 300						
	OSB/2	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	OSB/3, OSB/4	1	0,40	0,50	0,70	0,90	1,10
	OSB/3, OSB/4	2	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90
Tablero de partículas	UNE-EN 312						
	Tipo P4, Tipo P5	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	Tipo P5	2	0,20	0,30	0,45	0,60	0,80
	Tipo P6, Tipo P7	1	0,40	0,50	0,70	0,90	1,10
	Tipo P7	2	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90
Tablero de fibras duro	UNE-EN 622-2						
	HB.LA, HB.HLA 1 o 2	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	HB.HLA 1 o 2	2	0,20	0,30	0,45	0,60	0,80
Tablero de fibras semi-duro	UNE-EN 622-3						
	MBH.LA 1 o 2,	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
	MBH.HLS1 o 2	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
Tablero de fibras MDF	MBH.HLS1 o 2	2	-	-	-	0,45	0,80
	UNE-EN 622-5						
	MDF.LA, MDF.HLS	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
	MDF.HLS	2	-	-	-	0,45	0,80

¹OSB = Oriented Strand Board. El acrónimo es usado frecuentemente en lengua inglesa y se ha acuñado como un nombre usual para el material en otros idiomas, como de hecho sucede ya en el nuestro

Figura 1.10 Tabla 2.4 Valores del factor de modificación k_{mod}

2. TECNOLOGIA DEL CÁLCULO ESTRUCTURAL

2.1 BREVE HISTORIA DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

En las próximas líneas se pretende realizar un repaso histórico en lo que se refiere a la evolución tecnológica en el campo del análisis estructural haciendo referencia a los distintos avances e innovaciones producidas tanto en las ciencias (matemática y física), como a la aparición de nuevos inventos que han revolucionado la ingeniería estructural.

Desde las épocas antiguas egipcios, griegos y romanos construyeron grandes estructuras a base de pilares, muros y dinteles realizados en piedra y barro cocido en lo que denominaríamos estructuras de mampostería. Ya en aquellas épocas conocían principios de la estática y el análisis estructural; como ejemplo, Arquímedes (siglo III a.C.) introdujo el concepto de centro de gravedad y expresó los principios fundamentales de la estática y el equilibrio.

En cambio no fue hasta después del renacimiento que comienzan a aparecer escritos sobre el análisis estructural. Un factor importante que favoreció esta situación fue la notación decimal introducida por los árabes en la época medieval, la cual facilitó el uso de la matemática produciendo un desarrollo importante de esta.

En la edad media se abordó el análisis estructural de varias formas. Leonardo Da Vinci introdujo el concepto de fuerza y momento hacia finales del siglo XV. Posteriormente, a finales del siglo XVI Francis Bacon creó el método experimental, y en esa misma época Galileo Galilei fundó la Teoría de Estructuras. Galileo en 1638 escribió el libro que se titula "Dos Nuevas Ciencias" en el cual se analiza la falla de algunas estructuras simples como es el caso de la viga en voladizo. Los resultados que obtuvo no fueron muy acertados pero estableció las bases para el posterior desarrollo del análisis de la Resistencia de Materiales.

Seguido a los descubrimientos de Galileo, en el siglo XVII, se produjeron grandes avances. Por un lado Robert Hooke desarrolló la ley que relaciona linealmente la fuerza y la deformación de los materiales; y por otro lado Isaac Newton formuló las leyes del movimiento y desarrolló el cálculo diferencial e infinitesimal junto con Gottfried Leibniz.

A finales del siglo XVII y durante el siglo XVIII se produjeron grandes avances en la ingeniería estructural, principalmente se establecieron los principios fundamentales del concepto de energía, que relacionaba los esfuerzos y las deformaciones, además de las ecuaciones diferenciales que las relacionaban con sus respectivas soluciones. Estos avances vinieron dados por los matemáticos Johann Bernoulli que formuló el principio de los trabajos virtuales, Leonard Euler que desarrolló la teoría del pandeo en columnas, Charles Coulomb que presentó el análisis de la flexión de vigas elásticas, Louis M. Navier que realizó el primer texto sobre Resistencia de Materiales, Lagrange

que estableció las ecuaciones de deflexión de placas, y Emile Clapeyron que formuló la ecuación de los tres momentos para el análisis de vigas continuas.

Cabe apuntar que los años que comprenden desde finales del siglo XVII hasta comienzos del siglo XX son años de gran avance en lo que se refiere a la Ingeniería estructural en los que se desarrollaron ampliamente los conceptos mencionados. A esta época se la conoce como el siglo de oro de la ingeniería estructural.

En periodo moderno, de mediados a finales del siglo XIX, J.C. Maxwell presentó el teorema de las Deformaciones Recíprocas que analizaba como la energía interna de deformación de una estructura cargada está relacionada con las cargas externas aplicadas y posteriormente, en 1872 Betti publicó una forma generalizada del Teorema de Maxwell que hoy día se conoce como Teorema Recíproco de Maxwell-Betti. En esta misma época Otto Mohr obtuvo el famoso Círculo de Mohr que representa gráficamente los esfuerzos en un estado biaxial, y desarrolló un método para determinar la deflexión en vigas conocido como el método de la Viga Conjugada.

A continuación, a comienzos del siglo XX, G.A. Maney desarrolló el método de deflexión-pendiente que se considera como el precursor del método matricial de las rigideces. En 1930, Hardy Cross desarrolló el método de distribución de momentos y revolucionó el análisis de estructuras hiperestáticas (es conocido como método de Cross). Este método no requiere resolver sistemas de ecuaciones como lo requieren los métodos de Maxwell y de Mohr.

A partir de la década de los 60 del siglo XX y debido al avance computacional se podían resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas, que antes de la aparición de las computadoras costaban días incluso semanas resolver. Esto fue una revolución en el análisis estructural que puede ser atribuible entre otros a J.H. Argyris, R.W. Clough, S. Kelsey, R. Livesly, H.C. Martin, M.T. Turner, E.L. Wilson, O.C. Zienkiewicz...

2.1.1 LO QUE SUPUSO EL AVANCE COMPUTACIONAL

Gracias al avance computacional, el análisis estructural se declinó hacia métodos matriciales que tienen el objetivo de aplicarse a diferentes problemas de estructuras sin disminuir el número total de operaciones aritméticas a realizar. Estos métodos utilizan procedimientos numéricos para los cuales ya existen rutinas en las computadoras. Para llevar a cabo estos fines son muy útiles los conceptos del álgebra matricial.

Al fin y al cabo una computadora es una máquina programada para calcular. El programa es un conjunto de instrucciones, que a su vez son secuencias previamente preparadas que conducen a efectuar diferentes pasos de cálculo en orden correcto, y que controlan a la computadora. La programación es el trabajo de preparar dichas instrucciones, y lograr programas que resuelvan diferentes problemas estructurales. Generalmente, y si el programa es el correcto, los resultados serán correctos aunque el que use el programa sea ignorante del modelo matemático utilizado en este. Por tanto

se podrá realizar un correcto análisis realizando una correcta operación rutinaria de rellenar los datos requeridos.

Por contrapartida, los resultados del análisis por computador serán tan buenos como lo sean los datos y el modelo utilizado, por lo que el entendimiento del comportamiento de las estructuras, suposiciones sobre las acciones y solicitaciones que actuarán en la estructura, el comportamiento material, las condiciones de contorno y las conexiones entre los elementos serán nociones imprescindibles que deberá dominar hábilmente y con criterio riguroso el ingeniero antes de iniciar el análisis. Estos conceptos nunca podrán automatizarse al igual que la correcta interpretación y uso de los resultados del análisis.

En consecuencia, el ingeniero que se dedique al diseño estructural deberá estar familiarizado con los métodos de análisis matricial de estructuras, al mismo tiempo que deberá entender el uso correcto de esta forma automática de análisis que constituye una poderosa herramienta de análisis estructural.

La evolución del análisis estructural ha evolucionado impresionantemente a lo largo de la historia y lo seguirá haciendo, junto a los avances computacionales, mediante modelos numéricos adecuados para cada fin.

2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS Y ANÁLISIS COMPUTACIONAL

Siguiendo lo mencionado en el apartado anterior, parece natural que actualmente se apliquen métodos numéricos para el análisis estructural.

Se pueden catalogar los métodos numéricos como una rama de la matemática aplicada que está interesada en la resolución de un problema que afecta al hombre. Dichos métodos numéricos, mediante técnicas matemáticas, expresan la solución de un problema en forma numérica y por tanto dan como resultado de un problema, objeto de análisis, soluciones en forma de datos numéricos. Este tipo de solución es sustancialmente diferente a aquellas soluciones analíticas o exactas.

La diferencia reside en que la solución analítica es una expresión matemática, es decir una fórmula, que proporciona toda la información sobre el comportamiento de un sistema que satisface unas leyes generales denominadas ecuaciones de gobierno en el que intervienen un conjunto de variables y parámetros físicos; mientras que la solución numérica expresa el comportamiento del sistema mediante números que se obtienen resolviendo las ecuaciones de gobierno para valores concretos de las variables y parámetros.

El método analítico y el numérico comparten la necesidad de plantear de forma matemática el problema, y hasta el descubrimiento del cálculo infinitesimal (por Newton y Leibniz como mencionamos en el apartado anterior) esto no fue posible. El cálculo infinitesimal tiene la capacidad de expresar cualquier problema de la naturaleza en forma matemática mediante las ecuaciones diferenciales y por tanto, a partir de su

hallazgo, fue posible describir el comportamiento de cualquier sistema físico mediante ecuaciones diferenciales e integrales.

Siguiendo la técnica realizada por Arquímedes para la obtención del número π , diversos científicos observaron que si las ecuaciones diferenciales de un problema concreto se discretizaban el problema, es decir se dividía el dominio en partes más pequeña como lo hizo Arquímedes, se obtenían valores numéricos de las funciones incógnita. De esta manera nacieron los Métodos Numéricos.

La estrategia de los Métodos Numéricos es transformar una ecuación diferencial gobernante de un problema específico en un sistema de ecuaciones que depende de un número finito de incógnitas. El problema fue que normalmente el número de incógnitas de los diferentes casos era de muchos miles y por lo tanto, aunque muchos de los métodos numéricos eran conocidos en el siglo XIX, su desarrollo ha venido dado a partir del avance computacional producido en la década de los 60 del siglo XX.

2.2.1 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Después de haber realizado un rápido repaso sobre lo que la historia ha deparado en el campo de la Ingeniería estructural y de los avances tecnológicos ocasionados en pro de un análisis más riguroso y realista, pasamos a centrarnos en las herramientas numéricas utilizadas en el cálculo y análisis estructural hoy en día.

Como bien es sabido una de las tareas fundamentales, y la que más peso tiene, en el día a día de un ingeniero es el cálculo. Se podría definir el cálculo como la predicción cuantitativa del comportamiento de un sistema para un diseño eficiente del mismo. Para ese fin, el ingeniero deberá utilizar conceptos de física y matemática, y mediante estas herramientas formular un modelo matemático que describa adecuadamente el comportamiento del sistema objeto de diseño. Generalmente dicho modelo es un sistema de ecuaciones que se deberán resolver cuantitativamente para posteriormente dedicarse a interpretar y analizar técnicamente los datos obtenidos.

Los modelos que representan el problema objeto de cálculo y análisis podrán ser tan diversos como diferentes casos a analizar hay en la naturaleza; pueden ir desde el estudio estructural de automóviles, aviones, puentes, edificaciones, al análisis del flujo de calor en máquinas, o al análisis de flujo de fluidos, hasta filtraciones de agua en presas de tierras, y un largo etc....

Estos modelos son muy precisos, pero no exactos, y gracias a los avances computacionales se están pudiendo poner en práctica con muy buenos resultados. En este contexto ya hace unos años aparecieron diversas técnicas numéricas (ya definidas en apartados anteriores) entre las que destacan el método de diferencias finitas, el método de los elementos de contorno y el método de los elementos finitos. Podríamos catalogar este último como el más poderoso y por tanto el más utilizado entre ellos.

El método de los elementos finitos, de aquí en adelante MEF, es un método general para la resolución de problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales mediante la sustitución del problema diferencial por un problema algebraico equivalente para el cual se conocen las técnicas de resolución.

Para aplicar el MEF se hace uso de la discretización (lo que sería dividir el dominio, Figura 2.1) de la región sobre la que están definidas las ecuaciones de forma geométrica simples, y que se denominan elementos finitos. Dichas partes o elementos están conectados entre sí por puntos denominados nodos, y las propiedades materiales y relaciones que gobiernan estos elementos se expresan en función de los valores desconocidos en la unión de cada elemento, denominado nodo.

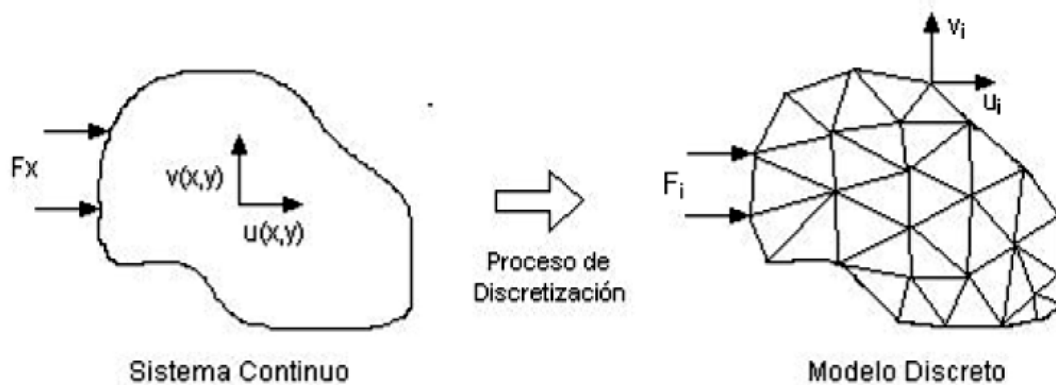


Figura 2.1 Discretización de la región

En la resolución de estructuras (problema asociado con el objeto de este trabajo) las incógnitas fundamentales del problema son los desplazamientos “desconocidos” de cada nodo. El resto de variables del problema como son las deformaciones, tensiones o esfuerzos se obtienen interpolando los movimientos. Para ellos se han de establecer las condiciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas de los materiales.

La ventaja de este método y una de las razones por las que es el más utilizado es la facilidad para implementarlo en un programa computacional, que a su vez es condición indispensable para su utilización ya que para la resolución de un problema particular mediante este método se deben realizar un número muy elevado de operaciones para resolver sistemas algebraicos de cientos de miles de ecuaciones.

A modo general, el proceso que deberíamos realizar en la utilización del MEF es:

- Definir la geometría o crearla a partir de algún programa CAD (Computer-Aided Design).
- Definir el modelo matemático a resolver. En este paso se especifican el tipo de ecuaciones a determinar, cómo son las condiciones de borde, las propiedades de los materiales, y demás detalles del método.
- Posteriormente la computadora resuelve automáticamente las ecuaciones.

El analista deberá interpretar y analizar correctamente los datos obtenidos mediante la resolución de las ecuaciones del paso anterior.

Por lo tanto, a modo de conclusión, el MEF es una metodología que permite simular con alto grado de precisión el comportamiento de estructuras sometidas a cargas de diseño, y darnos resultados de desplazamientos, esfuerzos y deformaciones que sufren dichas estructuras en su interior. Estos métodos junto con la ayuda de las altas tecnologías en computación son en la actualidad una de las herramientas más valiosas para cualquier análisis imaginable dentro de los cuales se encuentran las estructuras aplicadas en edificación y obra civil.

2.2.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La metodología de los elementos finitos permite abordar de varias maneras los problemas de estructuras, aunque los resultados finales deberán de ser parecidos usando el modelo que sea, siempre y cuando este sea capaz de representar la naturaleza del problema lo más exacto posible .

Las metodologías existentes van desde el análisis estructural mediante elementos barra y elementos viga, hasta el análisis estructural mediante elementos 3D en la Teoría del Sólido 3D, pasando por los elementos de placa y lámina. Existen también las Teorías de Revolución que son simplificaciones aplicables a las ciertas geometrías de revolución.

En el caso del análisis y diseño de vigas de M.L.E. es evidente realizar el análisis de estas mediante las teorías de vigas existentes, ya que en las vigas se cumplen las condiciones para las que se puede aplicar dichas teorías. No obstante las teorías clásicas de vigas no representan la naturaleza del problema con exactitud, ya que están modeladas para aplicarlas a materiales homogéneos. Por lo tanto esta teoría no encaja con los materiales compuestos como es el caso de la M.L.E.

En este apartado se pretenden introducir conceptos básicos de la teoría clásica de vigas de Euler-Bernoulli para poder entender con mayor profundidad la teoría de vigas extendida de Euler-Bernoulli con las que si se podrán modelar los problemas asociados a vigas de materiales compuestos, las cuales son objeto de este trabajo.

BASES TEÓRICAS – TEORÍA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

La teoría de vigas está asociada al análisis de geometrías de sólidos paralelepípedos en los que una de sus dimensiones es mucho más grande (la longitud) respecto a las otras dos (Figura 2.2).

Las hipótesis de la Teoría clásica de Euler-Bernoulli son las siguientes:

- 1) los desplazamientos verticales (w) de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga,
- 2) el desplazamiento lateral (en el eje y) es nulo y
- 3) según Euler-Bernoulli: las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación,

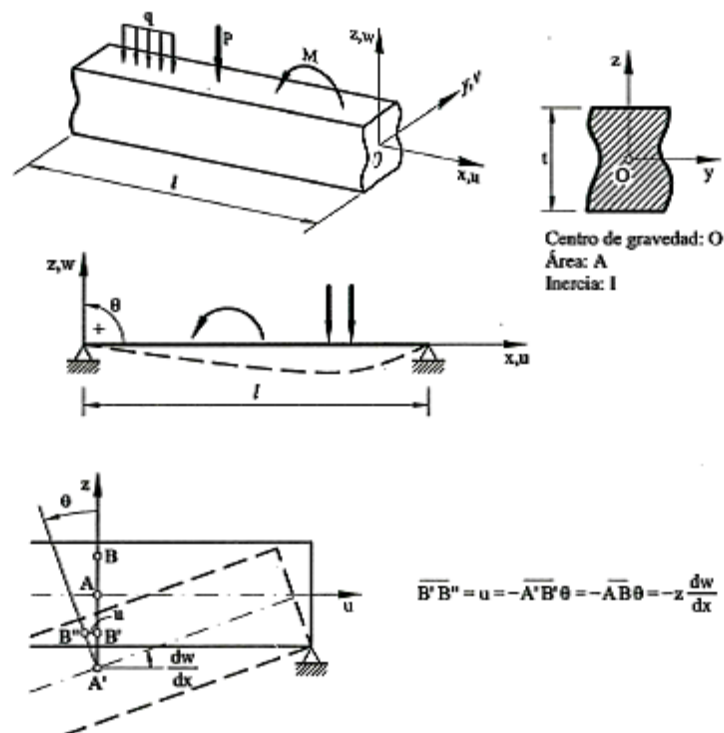


Figura 2.2 Descripción de la Teoría de E.B.

Apuntar que la teoría de vigas de Euler-Bernoulli es más segura para el análisis de vigas esbeltas, aunque hay que tener en cuenta que sus elementos son más limitados y complicados ya que esta teoría requiere una clase de continuidad C_1 debido a la presencia de derivadas segundas de la flecha en la expresión de trabajos virtuales. No tiene en cuenta la deformación por cortante pero tampoco sufre el bloqueo por cortante.

Campo de desplazamientos

$$u(x, y, z) = -z\theta(x)$$

$$v(x, y, z) = 0$$

$$w(x, y, z) = w(x)$$

donde:

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad u = -z \frac{dw}{dx}$$

Campo de deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Campo de tensiones

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -zE \frac{d^2w}{dx^2}$$

Esfuerzos

El momento flector de una sección se define como (Figura 2.3)

$$M = -\iint_A z\sigma_x dA = \iint_A z^2 E \frac{d^2w}{dx^2} dA = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI\chi$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal respecto de al eje y, y χ es la curvatura del eje de la viga.

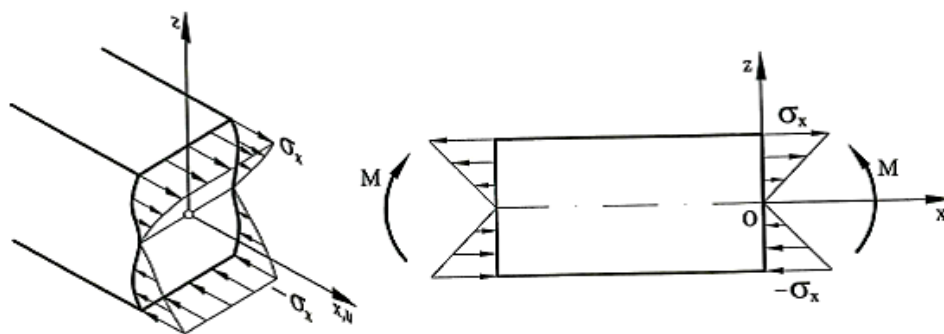


Figura 2.3 Esfuerzos

Principio de los trabajos virtuales (PTV)

$$\iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = - \int_0^l \delta w q dx - \sum_{i=1}^p \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^q \delta \theta_j M_j$$

La integral de volumen del primer miembro representa el trabajo de deformación virtual y se simplifica como sigue (para el caso de material homogéneo en cada sección).

Sustituyendo ε_x y σ_x obtenemos (2):

$$\iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_0^l \left[\iint_A -z^2 dA \right] E \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = \int_0^l \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_0^l \delta \chi M dx$$

(2)

En el principio de trabajos virtuales intervienen segundas derivadas en los movimientos por lo que se tendrán que utilizar elementos de clase C_1 .

2.2.3 LÍMITES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Hasta este punto hemos idealizado el MEF como panacea universal para la resolución de problemas intrínsecos naturales mediante la aplicación de ciencias como la matemática y la física (para el caso objeto del presente trabajo), pero es muy necesario saber cuáles son los límites que presenta para poder conocer con más exactitud el método y así utilizarlo más conscientemente.

Se ha dejado claro en los apartados precedentes que los métodos numéricos, como el MEF, tienen como objetivo reproducir el comportamiento del mundo natural resolviendo de forma numérica, y con ayuda de ordenadores, las ecuaciones matemáticas del modelo matemático que representa la realidad objeto de estudio. Para ello se ha tenido que establecer un modelo matemático, el cual generalmente está expresado mediante ecuaciones o inecuaciones. Los resultados obtenidos son datos numéricos que representados mediante gráficos representan la realidad que proporciona el modelo establecido. Por lo tanto la solución coincidirá con la solución real si el modelo matemático incorpora la totalidad de las variables que intervienen en la realidad; y si el método numérico escogido es capaz de resolver el modelo matemático establecido (ver Figura 2.6).

Que un modelo matemático incorpore todas las variables existentes en la realidad es sumamente difícil y si lo haría se complicaría enormemente la resolución numérica de dicho modelo. Por lo tanto la solución que normalmente se obtiene no coincide con la

de la realidad y por lo tanto es una solución que se aproxima en mayor o menor medida a la realidad.

Si conociésemos la solución exacta, y en apartados anteriores definíamos a la solución analítica como la solución exacta, podríamos compararla con la solución numérica obtenida y analizar en qué medida difieren para cuantificar el error de la predicción realizada. Desgraciadamente, la solución analítica o exacta para los problemas que se intentan resolver con modelos matemáticos es prácticamente imposible obtenerla por la complejidad del problema.

No obstante existe la posibilidad de comparar resultados empíricos obtenidos mediante experimentación para problemas concretos y de esta manera calibrar el modelo matemático o método numérico. Esta técnica se denomina validación experimental, mediante la cual haces valido o no el modelo y método utilizados y estableces cuantitativamente la diferencia de resultados entre el cálculo realizado y las mediciones obtenidas mediante el experimento. En la Figura 2.4 se puede observar cómo se realiza dicho proceso.

Por lo tanto, las referencias con las que podríamos comparar el conjunto de soluciones que resultan al predecir mediante cálculo con métodos numéricos frente a la solución real, que es desconocida, son los valores experimentales obtenidos en ensayos de laboratorio. Debe quedar claro que la visión que obtengamos de la realidad mediante estas herramientas será siempre aproximada, ya que existen numerosas limitaciones ante un modelo matemático ideal como por los errores posibles al aplicar los métodos numéricos a dicho modelo. Es imprescindible acumular experiencia en la calibración de de este tipo de modelos matemáticos y métodos numéricos y en la validación de los mismos para tener criterios a la hora de aceptar o no los resultados obtenidos.

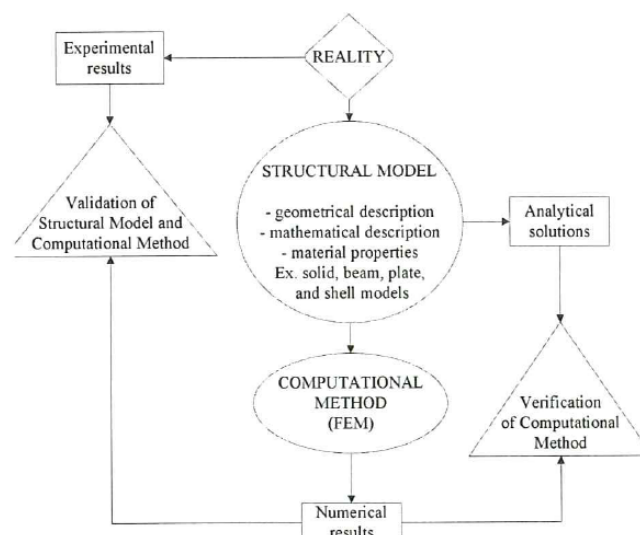


Figura 2.4 Verificación y validación de los resultados del MEF

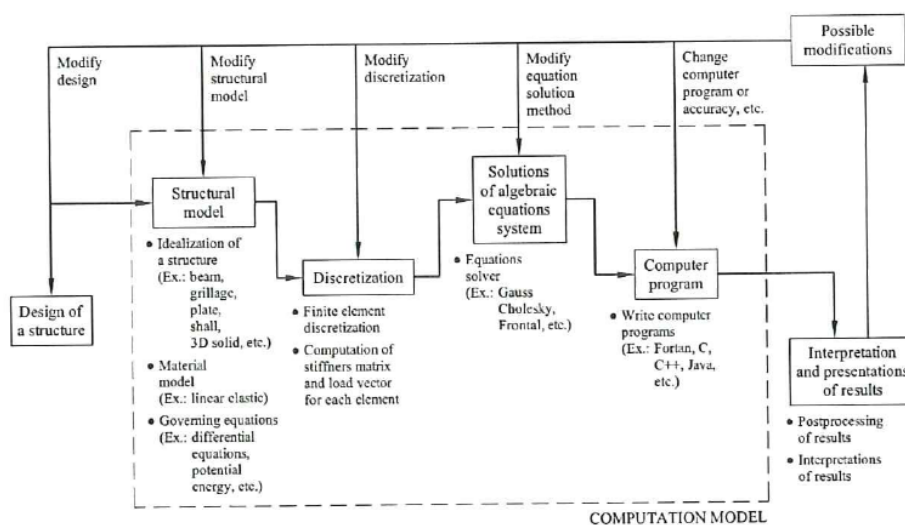


Figura 2.5 Proceso de aplicación del MEF

Discipline	STATIONARY PROBLEMS	EIGENVALUE PROBLEMS	PROPAGATION PROBLEMS
Civil, Aerospace and Naval Engineering	Static analysis of structures. Stationary porous media flow	Structural stability problems	Seismic and dynamic analysis of structures. Fluid dynamics analysis
Mechanical Engineering	Stress analysis of mechanical systems. Stationary heat transfer	Modal and vibration analysis of mechanical components	Dynamic analysis of mechanical systems. Transient heat transfer
Geotechnical Engineering	Stress analysis in soils and rocks. Flow through porous media	Modal and vibration analysis of soils	Wave propagation in soils and rocks
Nuclear Engineering	Stress and heat transfer analysis in nuclear structures. Fracture mechanics	Modal and vibration analysis of nuclear structures	Seismic and dynamic analysis of nuclear structures. Transient heat transfer
Electrical and Telecommunication Engineering	Stationary analysis of Maxwell equations	Frequency analysis of Maxwell equations	Transient solution of Maxwell equations

Figura 2.6 Clases de aplicación del MEF

2.3 MATERIALES COMPUESTOS Y MEF

Los materiales compuestos son aquellos materiales conformados artificialmente y que están compuestos por la unión de dos normalmente. La unión de estos materiales se realiza para conseguir materiales con mejores propiedades que los materiales de origen, como puede ser la mejora de la resistencia, o el aumento de la relación resistencia/peso, o la mejora de otras propiedades. Por poner ejemplos, son materiales compuestos los paneles de fibra de carbono (tejido de carbono en una matriz polimérica), los paneles de fibra de vidrio (fibras de vidrio en una matriz polimérica), el hormigón armado, o la madera laminada encolada, material objeto de este trabajo, que podríamos definir como material laminar compuesto de diferentes laminas de madera aserrada unidas (soldadas) entre sí con colas a base de polímeros.

Este avance material y tecnológico ha arrastrado consigo la necesidad de analizar dichos materiales, para poder conocer sus características, y así poder aplicarlos en diferentes sectores e industrias según se requiera. De esta manera, destaca la utilización que se les están dando a estos materiales en el ámbito de la ingeniería para la aplicación en estructuras de toda índole, las cuales normalmente son laminadas.

Si nos centramos en el material objeto de este trabajo, la M.L.E., y en la industria de la construcción, para el cálculo de estas estructuras se requiere tener en cuenta las características mecánicas y ortotrópicas, y la distribución de las capas, es decir la distribución de las laminas de madera y de las interfaces compuestas por cola que, constituyen el material.

Para el análisis de las características de dichos materiales, y con la finalidad de su aplicación estructural, los métodos numéricos computacionales son una de las herramientas más potentes y eficaces. Ya se ha mencionado en el apartado anterior que dentro del MEF existen numerosas teorías y modelos matemáticos aplicables para la realización de análisis computacional numérico, y que se deberá escoger una teoría u otra en función de los requerimientos de la problemática a analizar, por ejemplo, según condiciones de contorno que gobiernen el problema.

El objetivo de este trabajo es presentar La Teoría Zig-Zag Refinada para Vigas, teoría aplicable al análisis de materiales compuestos laminares, la cual aplicaremos posteriormente para el análisis de vigas laminadas de madera. La teoría Zig-Zag Refinada es implementada a partir de Teorías de Vigas Extendidas las cuales han evolucionado desde las teorías clásicas de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko.

En este apartado se realizará un primer enfoque de las teorías de vigas extendidas para su aplicación al análisis de estructuras realizadas con materiales compuestos laminados queriendo explicar la evolución que han tenido. Seguido, se realizará una comparación de las diferencias entre las teorías extendidas a partir de la Teoría Clásica de Vigas de Timoshenko y de la Teoría Clásica de Vigas de Euler-Bernoulli, y se finalizará presentando un elemento Zig-Zag de viga de dos nodos basado en la Teoría Extendida de Euler-Bernoulli con el cual en el próximo apartado se aplicará para realizar análisis numéricos de elementos estructurales de M.L.E.

2.3.1 ANALISIS DE VIGAS PLANAS

Una de las principales dificultades, sino la más importante, para el correcto modelado, que además provoca una nueva configuración de la formulación, en la consideración de los efectos de flexión, es el bloqueo por cortante. El efecto de flexión y de cortante provoca una sobrerigidización para ciertas configuraciones finas y esbeltas, que denominamos bloqueo por cortante, y pueden conducirnos a diseños inseguros.

Sin embargo, existen remedios a esta dificultad, pero los cuales podrían ocasionar efectos secundarios indeseables. Es preciso por ello diagnosticar y arreglar los modelos mediante técnicas matemáticas más avanzadas.

Antes de nada, es preciso realizar unos apuntes sobre la diferencia entre un material homogéneo y otro compuesto laminado.

En la Figura 2.7 se presentan las diferencias entre la variación de deformaciones (ϵ_x y γ_{xz}) y de tensiones (σ_x y τ_{xz}) en el canto de una viga de material homogéneo y de una viga de material compuesto laminado

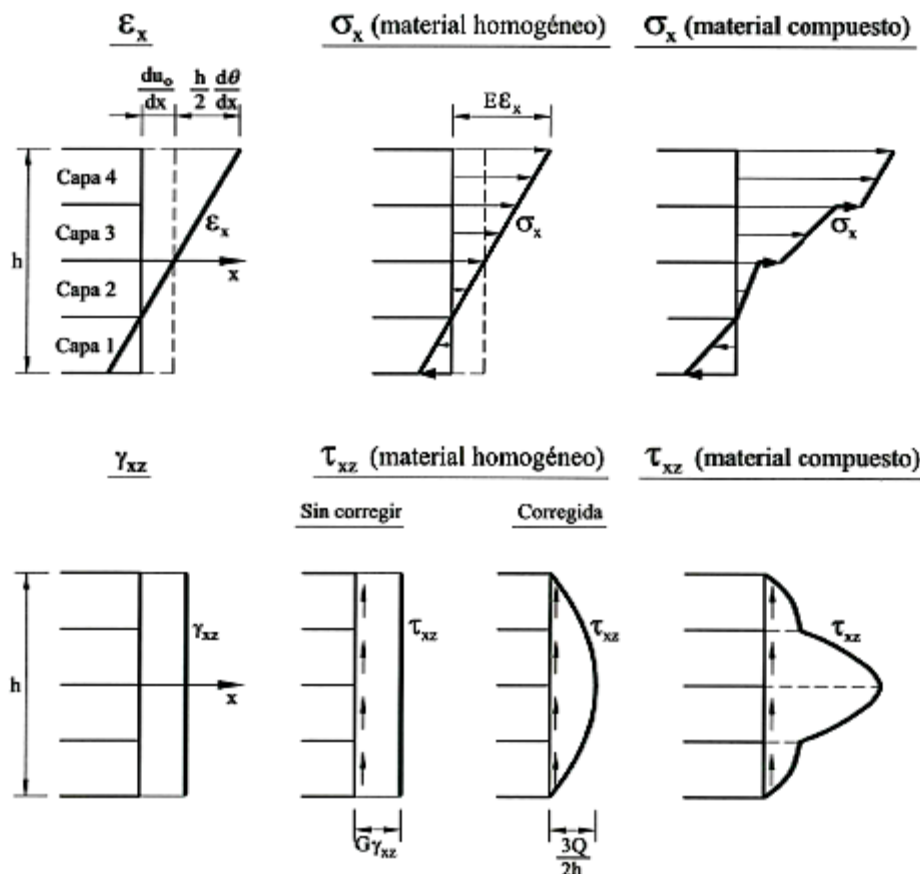


Figura 2.7 Distribución de las deformaciones y tensiones sobre el canto de una viga de material homogéneo y compuesto laminado

De las comparaciones anteriores se deduce que aunque en una viga de material compuesto laminado las deformaciones ϵ_x varían linealmente con el canto, la

distribución de tensiones σ_x a lo largo del canto es discontinua debido a las diferentes propiedades de cada capa del material Figura 2.7.

El valor de la rigidez de cortante con respecto a los de flexión afecta a la solución del problema de vigas y se puede cuantificar mediante el coeficiente β (3) que es:

$$\beta = \frac{12 \hat{D}_f}{l^2 \hat{D}_c} \quad (3)$$

En la Figura 2.8 se muestran los valores de β para diferentes secciones del material isótropo y compuesto. Cuando el valor de β es pequeño, indica que la influencia de la deformación por cortante es despreciable, y por tanto en estos casos puede utilizarse la clásica Teoría de Euler-Bernoulli para vigas esbeltas.

El valor β depende de las características geométricas y mecánicas de la sección, por tanto para la sección de viga rectangular de longitud l y canto h de material homogéneo se obtiene (4):

$$\beta = \frac{12}{l^2} \frac{EI}{kGA} = \frac{E}{kG} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (4)$$

β depende de la esbeltez y del cociente entre E y G . Para una viga de canto moderadamente grande ($l/h=4$) y material isótropo con $E/kG \approx 2$ se obtiene $\beta \approx 0.125$. Para una viga de esbeltez mucho mayor ($l/h=20$) de material compuesto con $E/kG \approx 50$ se obtiene también un $\beta \approx 0.125$.

Sección rectangular isótropa $\nu = 0.25$	$k = \frac{5}{6} \quad ; \quad \beta = 3 \left(\frac{h}{l} \right)^2$
Sección rectangular homogénea con $\frac{E}{kG} = 50$	$k = \frac{5}{6} \quad ; \quad \beta = 50 \left(\frac{h}{l} \right)^2$
Sección compuesta de 3 capas (Figura 5)	$k = 0.595 \quad ; \quad \beta = 105 \left(\frac{h}{l} \right)^2$
Sección compuesta de 9 capas (Figura 5)	$k = 0.689 \quad ; \quad \beta = 65 \left(\frac{h}{l} \right)^2$
Sección sandwich con $C = 50$ (Figura 5)	$k = 0.094 \quad ; \quad \beta = 84 \left(\frac{h}{l} \right)^2$

Figura 2.8 Valores del coeficiente β y del coeficiente corrector del esfuerzo cortante k para diversas secciones de vigas

Se deduce por tanto que la influencia de la deformación por cortante es la misma en una viga de material isótropo y canto grande que en una viga de material compuesto y más esbelta. Por esta razón está justificado el uso de la Teoría de Vigas de Timoshenko para el análisis de vigas de materiales compuestos

2.3.2 TEORÍAS DE VIGA PARA LAMINADOS COMPUESTOS

La teoría de vigas de Timoshenko produce predicciones inadecuadas cuando se aplica a vigas compuestas laminadas relativamente gruesas que están compuestas por capas que tienen rigideces muy distintas. Además cuando se utilizan factores de corrección para superar el bloqueo por cortante, la teoría de vigas de Timoshenko tiende a subestimar la tensión axial en las fibras superior e inferior de la viga. De igual manera, la tensión de cortante transversal a lo largo de la interface de las capas que se obtiene presenta discontinuidades erróneas a menudo. La alta complejidad a la hora de predecir la variación del campo de desplazamiento en el plano en la sección transversal de una viga heterogénea produce dificultades.

En realidad, para alcanzar resultados computacionales más exactos son preferidos los análisis mediante elementos finitos 3D frente a modelos viga, placa o lámina que se basan en teorías de cortante de primer orden como les sucede a las teorías de Timoshenko y Euler-Bernoulli.

Sin embargo para materiales compuestos laminados con alto número de capas el modelado 3D es altamente costoso especialmente para la resolución de análisis no lineales y en los análisis de fallo progresivo.

La necesidad de teorías de vigas, placas y láminas, aplicables a materiales compuestos laminados, que den predicciones más reales nos ha encaminado hacia el desarrollo de las teorías de orden superior. Del mismo modo, en las teorías refinadas los términos cinemáticos de alto grado son añadidos a las expresiones de los desplazamientos en el plano y en algunos casos a las expresiones de la deflexión.

En el próximo apartado describiremos la Layer-Wise Theory y la Teoría Zig-Zag, dos de las más populares teorías para el análisis de vigas de materiales compuestos laminados. Se presenta también una detallada descripción de la Teoría Mejorada Zig-Zag propuesta por Tessler et al. y el elemento de dos nodos de viga compuesta laminada basado en esta teoría.

TEORÍA LAYER-WISE

Mediante esta teoría es posible lograr una correcta predicción de las tensiones tangentes y axiales para materiales compuestos laminados altamente heterogéneos y gruesos y estructuras sándwich. En esta teoría la coordenada sobre el canto se divide entre el número de capas a analizar que pueden o no coincidir con el número de capas laminares. La cinemática es independientemente descrita dentro de cada capa y es preciso forzar algunos requerimientos de continuidad física.

En la Teoría Layer-Wise los ajustes generales del campo de desplazamientos 3Ds son escritos como una combinación lineal en función de las coordenadas del canto (z) y otras funciones independientes de la posición dentro del análisis de estas capas.

El campo de desplazamientos (5) se escribe:

$$u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + \sum_{k=1}^{N_i} u_i^k(x, y) \phi_k(z) \quad (5)$$

Donde N_i es el número de capas a analizar a lo largo del canto de la sección transversal laminada para modelar el componente de desplazamiento i , $u_i^k(x, y)$ son los desplazamientos en cada capa de interface k y ϕ_k son funciones conocidas de la coordenada de canto z . Las funciones ϕ_k son normalmente funciones a trozos y continuas dentro de cada capa. Estas al mismo tiempo son solamente definidas por otras dos capas adyacentes y es posible por tanto interpretarlas con una interpolación Lagrangiana C^0 asociada a la interface j .

Debido a la definición local de $\phi_k(z)$, los desplazamientos son continuos en la sección transversal a lo largo del canto, en cambio sus derivadas respecto de z no. Por lo tanto, la deformación tangencial es discontinua en las interfaces y consecuentemente la tensión tangencial transversal puede ser forzada para que sea continua para el caso de capas con diferentes propiedades mecánicas.

Para vigas laminadas la ecuación (5) se especifica como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{j=0}^N u^j(x) N_j(z) \\ w(x, y, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (6)$$

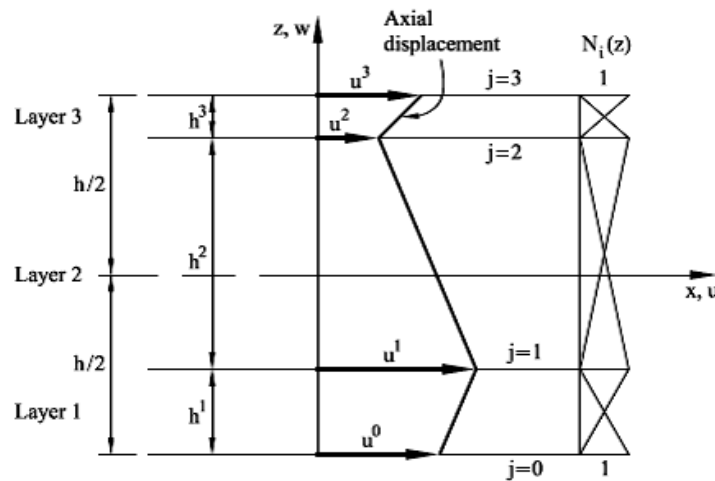


Figura 2.9 Distribución de campo de desplazamientos axiales para una viga tri-capa en la teoría Layer-Wise

Donde N es el número de capas a analizar, u y w son el desplazamiento horizontal (axial) y el vertical (flecha) respectivamente y N_i son las funciones de forma para cada capa. En la Figura 2.9 se representa el campo de desplazamientos axiales para viga compuesta de tres capas donde N es igual a 3.

Un inconveniente de la Teoría Layer-Wise es que el número de variables cinemáticas, que depende del número de capas a analizar. Sin embargo, los desplazamientos de las capas u_j pueden ser reducidos desde el punto de vista del desplazamiento axial en la capa superior en cada sección durante el proceso de resolución de la ecuación.

TEORIAS ZIG-ZAG

Las denominadas Teorías ZIG-ZAG son una subclase de la Teoría general Layer – Wise las cuales asumen un patrón ZIG-ZAG para el desplazamiento axial y fuerzan una distribución continua de la tensión tangencial a lo largo del canto de la sección transversal del elemento laminado.

Es importante destacar que en la Teoría ZIG-ZAG el número de variables cinemáticas es independiente al número de capas laminadas que contiene el elemento.

En la Teoría ZIG-ZAG el campo cinemático (7)(8) se puede escribir así:

$$\begin{aligned} u^k(x, z) &= u_0(x) - z \theta(x) + \bar{u}^k(x, z) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\bar{u}^k = \phi^k(z) \psi(x) \quad (8)$$

es la función de desplazamientos zigzag.

En las ecuaciones (7)(8), el superíndice k indica la k -ésima capa con $z_k \leq z \leq z_{k+1}$ donde z_k indica la coordenada vertical de la interface k . El desplazamiento axial uniforme $u_0(x)$, la rotación $\theta(x)$ y la deflexión transversal $w_0(x)$ son las principales variables cinemáticas de una única capa subyacente de la Teoría de vigas de Timoshenko. La función $\phi_k(z)$ indica una parte de la función linear zigzag, aun por verificar, y $\psi(x)$ es la variable cinemática primaria que define la amplitud de la función zigzag a lo largo de la viga. Cada Teoría ZIG-ZAG existentes difieren entre sí en el sentido de cómo definen la función $\phi_k(z)$. En la primeras Teorías ZIG-ZAG para placas, Di Sciuva, forzó una tensión tangencial constante a lo largo del canto laminado. Este modelo posteriormente fue mejorado con la adición de un desplazamiento cubico en el plano de la función zigzag. Varias Teorías ZIG-ZAG como la de Di Sciuva, requieren continuidad C^1 para el campo de deflexión, que es un inconveniente en comparación con aproximación del MEF mediante la simple continuidad C^0 . Otras Teorías ZIG-ZAG conducen a dificultades teóricas para satisfacer el equilibrio de fuerzas en un soporte empotrado.

La Teoría ZIG-ZAG para vigas la desarrolló Averill y superó la necesidad de la continuidad C1 imponiendo la continuidad de la tensión tangencial a lo largo del canto transversal mediante el método de penalti. Sin embargo, la teoría de Averill es incapaz de modelar correctamente condiciones de empotramiento. Posteriormente, Alan y Upadhyay propusieron un elemento de viga de dos nodos basado en la Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli y en una extensión de la Teoría ZIG-ZAG de Averill incluyendo un campo de desplazamientos cúbicos en el plano, el cual presenta buenos resultados para vigas sándwich y compuestas en ménsula y empotradas.

Tessler et al. desarrollaron una Teoría ZIG-ZAG Refinada (RFT) a partir de las suposiciones cinemáticas de la Teoría estándar de Timoshenko. La función zigzag escogida para modelar dicho problema tiene la propiedad de fuga en la capa superior e inferior de la sección transversal laminada. La característica particular de esta teoría es que no se requiere que la tensión tangencial transversal sea continua en las interfaces de las capas del laminado. El resultado es una simple función constante por partes que se aproxima a la distribución de la tensión tangencial real, además de que con ella se obtienen buenos resultados para problemas con soportes empotrados.

Gherlone et al. han desarrollado elementos viga de dos y tres nodos con continuidad C0 basados en la RFT para el análisis de compuestos multicapa y vigas sándwich. Estos elementos consiguen ser libres al bloque mediante el uso de una especial interpolación anisoparamétrica adaptada para aproximarse a las cuatro variables cinemáticas independientes que modelan la deformación de la viga.

Por otro lado, se logran elementos de viga de dos nodos imponiendo diferentes restricciones en la aproximación original de desplazamientos. Estas condiciones de restricción proporcionan un elemento viga de dos nodos preciso mediante el requerimiento de una variación constante de la fuerza cortante transversal.

Oñate et al. tomaron una ruta diferente que deriva en un simple elemento viga de 2 nodos basado en la Teoría ZIG-ZAG Refinada (RZT). Se usa un campo de desplazamientos lineal estándar para modelar las cuatro variables del elemento LRZ. El bloqueo por cortante se evita usando una integración reducida en algunos términos seleccionados de la matriz de rigidez de cortante.

En la siguiente sección describiremos la Teoría ZIG-ZAG Refinada propuesta por Tessler et al., detallaremos la formulación de el elemento viga de dos nodos LRZ y se demostrara el buen comportamiento de este elemento aplicado a vigas compuestas laminadas simplemente apoyadas y empotradas, o en voladizo. También se presenta un ejemplo de la capacidad para modelar la delaminación.

3. TEORIA ZIG-ZAG REFINADA

3.1 TEORÍA ZIG-ZAG REFINADA

En este apartado se pretende presentar resumidamente la Teoría ZIG-ZAG Refinada (RZT), la formulación del elemento viga de dos nodos LRZ y un ejemplo del modelado de la delaminación.

Campo de desplazamientos

La características claves de la Teoría ZIG-ZAG Refinada son: primero que la función zigzag fuga en las caras superior e inferior de la sección de la viga y por tanto no necesita continuidad total de la tensión tangencial a lo largo del canto de la viga laminada, segundo que todas las condiciones de contorno se pueden modelar adecuadamente, y tercero que la solo se requiere continuidad C0 para la aproximación de las variables cinemáticas par el MEF.

La función zigzag (9) se expresa de la siguiente manera en cada capa:

$$\phi^k = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\bar{\phi}^{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \zeta)\bar{\phi}_k^k = \frac{\phi^k + \bar{\phi}^{k-1}}{2} + \frac{\bar{\phi}_k^k - \bar{\phi}^{k-1}}{2}\zeta^k \quad (9)$$

donde $\bar{\phi}_k^k$ and $\bar{\phi}^{k-1}$ son las funciones zigzag de las interfaces k y k-1 respectivamente con $\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}^{n1} = 0$ y $\zeta^k = 2(z - z_{k-1}) h^{k-1}$.

.

Fijarse que el desplazamiento \bar{u}_k zigzag también fuga en las capas superior e inferior Figura 3.1. El campo del desplazamiento axial se puede observar en la Figura 3.1.

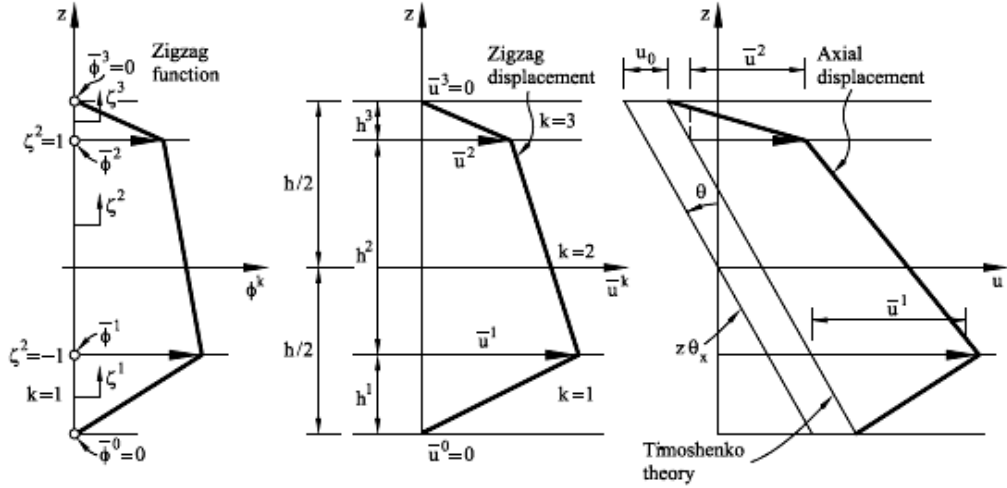


Figura 3.1 Distribución de la función zig-zag ϕ^k , el desplazamiento zigzag u^k y el desplazamiento axial u en la teoría de vigas refinada zigzag

La forma de ϕ^k de la ecuación (9) da una distribución constante de su gradiente dentro de cada capa β^k (10), esto es:

$$\beta^k = \frac{\partial \phi^k}{\partial z} = \frac{\bar{\phi}^k - \bar{\phi}^{k-1}}{h^k} \quad (10)$$

De la ecuación (10) y de la condición $\bar{\phi}^0 = \bar{\phi}^N = 0$ se deduce (11):

$$\iint_A \beta^k dA = 0 \quad (11)$$

El parámetro β^k es muy útil para computar la función zigzag que se describirá en la siguiente sección.

Campos de deformaciones y tensiones

La relación desplazamiento-deformación se obtienen de las ecuaciones de deformación de vigas planas laminadas y de las ecuaciones (7)(8) como:

$$\varepsilon_x^k = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} + \phi^k \frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1, -z, \phi^k \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\} = S_p \hat{\varepsilon}_p \quad (12)$$

$$\gamma_{xz}^k = \gamma + \beta^k \psi = [1, \beta^k] \begin{Bmatrix} \gamma \\ \psi \end{Bmatrix} = S_t^k \hat{\varepsilon}_t \quad (13)$$

con

$$S_p = [1, -z, \phi^k], \quad \hat{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

$$S_t^k = [1, \beta^k], \quad \hat{\varepsilon}_t = [\gamma, \psi]^T \quad (14)$$

Donde $\hat{\varepsilon}_p$ y $\hat{\varepsilon}_t$ son las deformaciones en el plano (axial -flexión) y deformaciones transversales tangenciales generalizadas respectivamente.

En la ecuación (13), $\gamma = \partial_{w0} / \partial_x - \theta$. Integrando la ecuación (13) sobre la sección transversal y usando la ecuación (11) y el factor Ψ que es independiente de los rendimientos z

$$\gamma = \frac{1}{A} \iint_A \gamma_{xz}^k dA \quad (15)$$

Esto es, γ representa la deformación tangencial transversal media de la sección transversal. La relación tensión-deformación de Hooke para la k -ésima capa ortotrópica tiene la forma estándar

$$\sigma_x^k = E^k \varepsilon_x^k = E^k S_p^k \hat{\varepsilon}_p \quad (16)$$

$$\tau_{xz}^k = G^k \gamma_{xz}^k = G^k S_t^k \hat{\varepsilon}_t \quad (17)$$

donde E_k y G_k son el modulo axial y transversal para la k -ésima capa respectivamente. Fijarse que en las ecuaciones anteriores se ha distinguido todas las variables para una capa con superíndice k .

Computación de la función zigzag

La relación tangencial de deformación-cortante de la ecuación (13) se escribe como

$$\tau_{xz}^k = G^k \eta + G^k (1 + \beta^k) \psi \quad (18)$$

Donde $\eta = \gamma - \Psi$ es una función diferente. Claramente la distribución de τ_{xz}^k dentro de cada capa es constante, como lo es η independiente de la función zigzag y β^k es constante (ecuación (10)).

La distribución τ_{xz}^k es impuesta para ser independiente de la función zigzag. Esto puede lograrse limitando el término multiplicador Ψ de la ecuación (18) para que sea constante, esto es:

$$G^k(1 + \beta^k) = G^{k+1}(1 + \beta^{k+1}) = G, \text{ constante} \quad (19)$$

Esto es equivalente a imponer la continuidad interfacial del segundo término en la r.h.s de la ecuación (18).

De la ecuación (19) se deduce

$$\beta^k = \frac{G}{G^k} - 1 \quad (20)$$

Si sustituimos β^k en la integral de la ecuación (11), nos da

$$G = \left[\frac{1}{A} \iint_A \frac{dA}{G^k} \right]^{-1} = \left[h \sum_{k=1}^N \frac{h^k}{G^k} \right]^{-1} \quad (21)$$

Que es el modulo transversal equivalente para el laminado. Sustituyendo la ecuación (10) en la ecuación (11) tenemos la siguiente relación para los valores de la función zigzag en la interfaces de las capas

$$\bar{\phi}_k = \sum_{i=1}^k h^i \beta^i \quad \text{con} \quad u^0 = u^N = 0 \quad (22)$$

con β^i dado por la ecuación (20).

Si introducimos la ecuación (22) en la ecuación (9) se obtiene la expresión para la función zigzag como

$$\phi^k = \frac{h^k \beta^k}{2} (\zeta^k - 1) + \sum_{i=1}^k h^i \beta^i \quad (23)$$

Esta Teoría ZIG-ZAG no impone la continuidad de la tensión tangencial en la sección transversal. Esto es consistente con la libertad cinemática inherente en la aproximación cinemática de bajo orden de la teoría de viga subyacente.

Para materiales homogéneos $G^k = G$ y $\beta^k = 0$. Por lo tanto, la función zigzag ϕ_k fuga y podemos recuperar la expresión cinemática y constitutiva de la Teoría de viga compuestas laminadas estándar de Timoshenko.

Finalmente decir, que la función Ψ puede ser interpretada como el peso promedio del ángulo de deformación transversal. El valor de Ψ debería ser prescrito para ser cero en el caso de borde empotrado y quedas sin prescripción en el caso de borde libre.

Relaciones constitutivas generalizadas

Las tensiones resultantes se definen como:

$$\hat{\sigma}_p = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ M_\phi \end{Bmatrix} = \iint_A [S_p^k]^T \sigma_x^k dA = \left(\iint_A [S_p^k]^T S_p^k E^k dA \right) \hat{\varepsilon}_p = \hat{D}_p \hat{\varepsilon}_p \quad (24)$$

$$\hat{\sigma}_t = \begin{Bmatrix} Q \\ Q_\phi \end{Bmatrix} = \iint_A [S_t^k]^T \tau_{xz}^k dA = \left(\iint_A [S_t^k]^T S_t^k G^k dA \right) \hat{\varepsilon}_t = \hat{D}_t \hat{\varepsilon}_t \quad (25)$$

En el vector $\hat{\sigma}_p$ y en $\hat{\sigma}_t$, N, M y Q son las fuerza axial, el momento flector y la fuerza cortante respectivamente de la teoría de vigas estándar, donde M_ϕ y Q_ϕ son un momento flector y una fuerza cortante adicional que se conjugan en la nueva deformación generalizada $\partial\Psi/\partial x$ y Ψ respectivamente.

Las matrices constitutivas generalizadas \hat{D}_p y \hat{D}_t son

$$\hat{D}_p = \iint_A E^k \begin{bmatrix} 1 & -z & \phi^k \\ -z & z^2 & -z\phi^k \\ \phi^k & -z\phi^k & (\phi^k)^2 \end{bmatrix} dA, \quad \hat{D}_t = \begin{bmatrix} D_s & -\delta \\ -\delta & \delta \end{bmatrix} \quad (26)$$

con

$$D_s = \iint_A G^k dA, \quad \lambda = D_s - GA \quad (27)$$

En la derivada de la expresión para \hat{D}_t hemos usado la definición de β^k de la ecuación (20).

La ecuación constitutiva generalizada se puede escribir como

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_p \\ \hat{\sigma}_t \end{Bmatrix} = \hat{D} \hat{\varepsilon} = \hat{D} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_p \\ \hat{\varepsilon}_t \end{Bmatrix}, \quad \text{con} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{D}_p & 0 \\ 0 & \hat{D}_t \end{bmatrix} \quad (28)$$

Es interesante el hecho de que esta formulación no requiera de correcciones del parámetro de cortante k_z .

Expresión de los trabajos virtuales

La expresión del trabajo virtual para una carga distribuida q es

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_x^k \sigma_x^k + \delta \gamma_{xz}^k \tau_{xz}^k) dV - \int_l \delta w q dA = 0 \quad (29)$$

El lado izquierdo de la ecuación (29) contiene el trabajo virtual interno realizado por la tensión axial y tangencial y el r.h.s es el trabajo virtual externo realizado por la carga distribuida. V y l son el volumen y la longitud de la viga respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (12)(13)(14) dentro de la expresión para el trabajo virtual interno y usando las ecuaciones (24) y (25) tenemos

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_x^k \sigma_x^k + \delta \gamma_{xz}^k \tau_{xz}^k) dV = \iiint_V (\delta \hat{\varepsilon}_p^T [S_p^k]^T \sigma_x^k + \delta \hat{\varepsilon}_t^T [S_p^k]^T \tau_{xz}^k) dV = \int_l (\delta \hat{\varepsilon}_p^T \hat{\sigma}_p + \delta \hat{\varepsilon}_t^T \hat{\sigma}_t) dx \quad (30)$$

El trabajo virtual es por tanto escrito como

$$\int_l (\delta \hat{\varepsilon}_p^T \hat{\sigma}_p + \delta \hat{\varepsilon}_t^T \hat{\sigma}_t) dx - \int_l \delta w q dx = 0 \quad (31)$$

Esta expresión es la base para derivar el elemento viga de dos nodos zigzag como se explica en la siguiente sección.

3.1.1 ELEMENTO DE VIGA COMPUESTA LAMINADA DE DOS NODOS LRZ

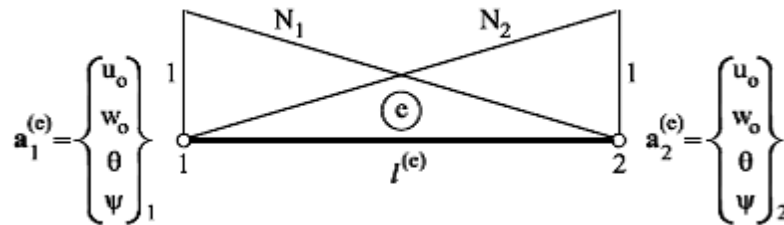


Figura 3.2 Elemento de viga compuesta laminada de dos nodos LRZ

Las variables cinemáticas son u_0, w_0, θ y ψ ; y son discretizadas usando un elemento viga de 2 nodos lineal de continuidad C0 de longitud l en la Figura 3.2 como

$$u = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i a_i^{(e)} = N a^{(e)} \quad (32)$$

con

$$N = [N_{1/4}, N_{2/4}], \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ w_{0i} \\ \theta_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} \quad (33)$$

donde $N_i = 1/2(1 + \xi \xi_i)$ con $\xi = 1 - 2x/l_e$ que son las funciones de forma lineales de 1D estándares, $a^{(e)}$ es el vector de variables nodales cinemáticas y I_4 es la matriz unidad de 4×4 .

Si sustituimos la ecuación (32) en el vector de deformaciones generalizadas de la ecuación (14) se obtiene'

$$\hat{\varepsilon}_p = B_p a^{(e)}, \quad \hat{\varepsilon}_t = B_t a^{(e)} \quad (34)$$

Las matrices de deformación generalizadas B_p y B_t son

$$B_p = [B_{p1}, B_{p2}], \quad B_t = [B_{t1}, B_{t2}] \quad (35)$$

con

$$B_{pi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$B_{ti} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{si} \\ B_{\psi i} \end{bmatrix} \quad (37)$$

donde B_{pi} y B_{ti} son las matrices de deformación en el plano y tangencial para el nodo i .

El desplazamiento virtual y el campo de deformaciones generalizadas son expresados en términos de las variables cinemáticas nodales virtuales como

$$\delta u = N \delta a^{(e)}, \quad \delta \hat{\varepsilon}_p = B_p \delta a^{(e)}, \quad \delta \hat{\varepsilon}_t = B_t \delta a^{(e)} \quad (38)$$

Las ecuaciones de equilibrio discretizadas se obtienen substituyendo las ecuaciones (24), (25), (32), (34) y (38) en la expresión del trabajo virtual de la ecuación (31). Después de una simplificación de las variables cinemáticas virtuales se obtiene la siguiente ecuación de la matriz estándar

$$Ka - f = 0 \quad (39)$$

Donde a es el vector nodal de variables cinemáticas para toda la malla.

La matriz de rigidez K y el vector de fuerzas nodales equivalente f son obtenidos ensamblando la contribución del elemento $K^{(e)}$ y $f^{(e)}$ dado por

$$K^{(e)} = K_p^{(e)} + K_t^{(e)} \quad (40)$$

con

$$K_{pij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} B_{pi}^T \hat{D}_p B_{pj} dx \quad , \quad K_{tij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} B_{ti}^T \hat{D}_t B_{tj} dx \quad (41)$$

y

$$f^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i q [1, 0, 0, 0]^T dx \quad (42)$$

La matriz $K^{(e)}_p$ es integrada con una cuadratura numérica de un punto que es exacta en este caso. La integración total de la matriz $K^{(e)}_t$ requiere dos puntos de cuadratura de Gauss. Sin embargo, esto, conduce al bloque por cortante en vigas compuestas laminadas esbeltas. El bloqueo por cortante puede ser eliminado mediante la integración reducida de todo (o algunos) términos de la matriz $K^{(e)}_t$. Para este propósito se divide la matriz como

$$K_t^{(e)} = K_s^{(e)} + K_\psi^{(e)} + K_{s\psi}^{(e)} + \left[K_{s\psi}^{(e)} \right]^T \quad (43)$$

con

$$\begin{aligned} K_{sij}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} D_s B_{si}^T B_{sj} dx \quad , \quad K_{\psi ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \delta B_{\psi i}^T B_{\psi j} dx \\ K_{s\psi ij}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} (-\delta) B_{si}^T B_{\psi j} dx \end{aligned} \quad (44)$$

Donde B_{si}^T y $B_{\psi i}$ son definidos en la ecuación (37), y D_s y δ son dados en la ecuación (27).

La conclusiones obtenidas del estudio de la exactitud y de la convergencia del elemento viga LRZ para el análisis de vigas laminadas de diferentes esbelteces, usando cuadratura de uno y dos puntos para integrar $K_s^{(e)}$, $K_\psi^{(e)}$ y $K_{s\psi}^{(e)}$, apuntan que para valores pequeños de λ (esbelteces) la reducida y reducida exacta integración de la

matriz $K^{(e)}_t$ conduce a resultados similares. Sin embargo, para vigas esbeltas, los resultados obtenidos mediante la integración reducida de $K^{(e)}_s$; $K^{(e)}_s$ y $K^{(e)}_{s\psi}$; $K^{(e)}_s$, $K^{(e)}_{s\psi}$ y $K^{(e)}_\psi$ son diferentes. Se han obtenido resultados ligeramente más exactos para la segunda elección en la sección de $x=L/4$ y $\lambda=100$.

Se concluye recomendando el uso de integración reducida en un punto para $K^{(e)}_s$ y $K^{(e)}_{s\psi}$, mientras que $K^{(e)}_\psi$ debería ser integrado con cuadratura de dos puntos.

3.1.2 MODELADO DE LA DELAMINACION CON ELEMENTOS LRZ

La predicción de la delaminación en vigas compuestas laminadas es un reto para todos los modelos de vigas. Una técnica para predecir la delaminación consiste en un método sub-laminar en el que el número de variables cinemáticas depende del número físico de capas laminares. Este método aumenta considerablemente el número de variables pero reproduce una distribución exacta de la tensión tangencial correcta sin integrar las ecuaciones de equilibrio.

Es posible reproducir los efectos de la delaminación en vigas compuestas laminadas sin la necesidad de introducir variables cinemáticas adicionales con el elemento de viga LRZ. El modelo de delaminación simple implica introducir una muy delgada capa de interface entre las actuales capas adyacentes de la sección compuesta laminada. La delaminación se produce al ocasionarse un fallo interlaminar, por la reducción drástica a casi cero, de las propiedades del material de la interfase en comparación con las propiedades de las capas adyacentes.

El modelo de delaminación simple permite al elemento LRZ tener en cuenta la reducción global de la viga cuando se ocasiona el fallo interlaminar, y hace que se aumenten los campos de deflexión y rotación. Además, el elemento LRZ permite representar con precisión el salto ocasionado en el campo de desplazamientos axiales, y por tanto el cambio en las distribuciones axiales y tangenciales en la sección de la viga ocasionados por el progreso de delaminación.

En las siguientes líneas resumiremos como se plantea el problema para el correcto modelado de la delaminación usando el elemento LRZ.

Se presenta una viga en voladizo gruesa de sección rectangular compuesta de tres láminas bajo la aplicación de una carga puntual en el extremo libre. Las propiedades de cada lámina son diferentes. La delaminación se modela introduciendo una fina capa en la interfase de dos capas ($h=0.01m$) que inicialmente tiene un módulo transversal que coinciden con la capa superior y que posteriormente este valor (módulo transversal) de la interfase se va reduciendo progresivamente hasta llegar a un valor del orden de 11 veces la magnitud inicial. Esta reducción del módulo trasversal se realiza sobre la totalidad de la longitud de la interfase.

A continuación se obtienen los resultados del análisis y se compara la deflexión; que aumenta a medida que el módulo transversal varía en la interfase.

Se observa, también, que el salto ocasionado en el desplazamiento axial a lo largo del espesor de la capa de la interface durante la delaminación es correctamente capturado cuando se reduce el valor del módulo transversal de la interface.

Estos análisis se realizan en comparación con otros realizados en un modelado mediante Estado Plano de Tensiones y los resultados concuerdan satisfactoriamente.

Del mismo modo son obtenidos los resultados correctos para la distribución axial y tangencial de las tensiones a lo largo de toda la longitud.

El elemento LRZ, por tanto, es capaz de recoger el proceso de delaminación de una viga compuesta laminada correctamente.

3.1.3 CONCLUSIONES

La formulación de los elementos de viga compuesta laminada introduce la elongación axial del eje de la viga, la fuerza axial y la correspondiente matriz de rigidez axial dentro de la teoría clásica de flexión de vigas. Los efectos axiales y flectores son generalmente acoplados el uno al otro excepto para una distribución simétrica de la geometría de la sección transversal y de las propiedades materiales, o, con mayor generalidad, cuando el eje de la viga coincide con el eje neutro.

Un material compuesto laminado aumenta la importancia de los efectos de la deformación cortante, incluso para vigas esbeltas. Esto hace a la Teoría de Timoshenko más apropiado para el análisis de vigas compuestas laminadas.

El elemento compuesto laminado de viga de Timoshenko sufre el efecto del bloqueo por cortante, aunque este efecto puede ser eliminado mediante diferentes técnicas. Para el elemento de 2 nodos, el procedimiento más simple es la integración reducida en un punto de todos los términos de la matriz rigidez. El elemento compuesto laminado de viga de Euler-Bernoulli comparte las características clave de la Teoría de Timoshenko con respecto al acoplamiento axial-flexión, mientras que descuida los efectos de la deformación tangencial.

Las teorías de orden superior, como la Teoría ZIG-ZAG Refinada descrita proporcionan una descripción más exacta del desplazamiento axial y de la tensión tangencial a lo largo del canto de la sección transversal. El elemento viga LRZ de dos nodos es un excelente candidato para el análisis práctico de vigas compuesta laminadas.

3.2 ELEMENTO DE VIGA ZIGZAG BASADO EN LA TEORIA EXTENDIDA DE EULER-BERNOULLI (EEBZ2)

En este apartado se recoge detalladamente la formulación de un elemento viga Zig-Zag basado en la Teoría Extendida de Euler-Bernoulli. Se pretende analizar su capacidad para aplicarlo al análisis de vigas compuestas laminadas y vigas sándwich, y compararlo con los elementos ya existentes para ese fin.

Como se ha dispuesto en el apartado anterior, Tessler et al. desarrollaron no hace mucho La Teoría ZIG-ZAG Refinada basada en la Teoría de Vigas de Timoshenko para el análisis de vigas y placas compuestas laminadas y sándwich. En esta teoría la función zigzag tiene la capacidad de desvanecerse en las caras superior e inferior de la sección transversal, además de que no es necesario que la tensión tangencial sea continua a lo largo de las interfaces de las capas. Por ello la distribución de la tensión tangencial se define simplemente como partes de funciones constantes que se aproximan a la media de la distribución real; no obstante la distribución exacta de la tensión tangencial se obtiene en el post-proceso integrando la ecuación de equilibrio de la tensión axial.

En el presente apartado, como ya mencionamos, se analizara un elemento de 2 nodos basado en la teoría Zig-Zag y la teoría clásica de Euler Bernoulli para realizar análisis estático de vigas compuestas laminadas y vigas sándwich, que está basado en el elemento RZT y EBT, y el cual tiene en cuenta los efectos de la distorsión debidos a la deformación tangencial elástica y los efectos debidos a la delaminacion. En contraposición al elemento RZT, el elemento EEBZ2 requiere una interpolación cubica de Hermite C1 para la deflexión vertical y una interpolación linear C0 para las demás variables. La matriz de rigidez y los vectores de fuerzas son calculados mediante integración directa.

También se comprueba la validez del método para reproducir la deflexión vertical a lo largo de la longitud de la viga, la distribución "zigzag" del desplazamiento axial, y las tensiones axiales y tangenciales a lo largo del canto de la sección de la viga. Se comprueba también que no sufre el bloqueo por cortante para todos los rangos de esbelteces.

El efecto de la delaminacion se simula mediante la incorporación de una función zigzag adicional que se corresponde con la cinemática de una capa de delaminacion de espesor cero. Como mencionamos en el apartado anterior, el método numérico más exacto para resolver este tipo de problema es la formulación 3D de elementos finitos. Pero, por contrapartida, conlleva un alto coste computacional sobre todo en problemas de con alto número de capas o problemas no lineales.

Una de las formas con la que podríamos superar el problema de la modelación 3D, es incorporando términos de alto orden con respecto a la coordenada del canto. Así nacen, las teorías de capa simple equivalente (SL_Single Layer theories). Sin embargo aunque es eficiente en cuanto al coste computacional, genera resultados inexactos de distribución de deformación y de tensión a lo largo del canto de la viga.

Las Teorías Layer-wise son otra opción en la que la distribución del desplazamiento es definida capa por capa. Esta teoría da unos resultados muy exactos pero como el número de variables cinemáticas es proporcional al número de capas incrementa bastante el coste computacional.

Las TEORIAS ZIG-ZAG son un subgrupo de la teoría general de Layer-wise en la que las variables cinemáticas son independientes del número de capas. Asumen que el desplazamiento axial es una superposición de varias distribuciones parciales de desplazamiento axial, en forma de geometría zigzag.

El elemento presentado esta basado en las suposiciones de las teorías de vigas de Euler Bernoulli y Timoshenko clásicas. Algunos investigadores consideran que el requerimiento de la continuidad C1 para los campos de desplazamientos en la E.B.T. es un inconveniente en comparación con la continuidad C0 de T.B.T. La principal razón es la dificultad de la continuidad C1 para satisfacer el equilibrio de las fuerzas en los empotramientos.

Campo de desplazamientos

El campo de desplazamiento viene definido, como en el apartado anterior, para una viga compuesta laminada de longitud L, espesor b, y canto h; en un sistema de coordenadas Cartesiano 2D (x,z) donde x es la dirección longitudinal y z la coordenada sobre el canto. El superíndice k denota cantidades en la capa k, donde z_k es la coordenada vertical de la parte inferior de la capa k ($z_k < z < z_{k+1}$)

$$\begin{cases} u^k(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \bar{u}^k(x, z) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (45)$$

donde $u_0(x)$ es el desplazamiento axial, w_0 es la deflexión vertical y $\bar{u}^k(x, z)$ es la función de desplazamiento zigzag. Representa la distorsión relativa de la cara del plano de la sección transversal respecto del plano normal deformado del eje de la viga

$$\bar{u}^k(x, z) = \left(\phi_s^k(z) + \phi_d^k(z) \right) \psi(x) \quad (46)$$

$\phi_s^k(z)$ tiene en cuenta los efectos de distorsión por la deformación elástica tangencial y $\phi_d^k(z)$ tiene en cuenta los efectos de distorsión por delaminación. $\psi(x)$ es el ángulo de cortante. Dicha funciones vienen definidas como:

$$\phi_s^k(z) = -z + \bar{\phi}_s^{k-1} + \beta_s^k(z - z_{k-1}) \quad (47)$$

$$\phi_d^k(z) = \bar{\phi}_d^{k-1} + \beta_d^k(z - z_{k-1}) \quad (48)$$

$$\bar{\phi}^{k-1} = \beta_d(z_{k-1} + \frac{h}{2}) - h\beta_d \quad (49)$$

$$\beta_d = \sum_{i=1}^{ncaras} \beta_d^i \quad (50)$$

donde $n_{icaras}=n_{capas}-1$ (es el numero de interfaces) y β_d es el valor que representa el grado de delaminación de la interface "i". El valor de β_d está entre 0 (no delaminado) a 1 (delaminacion total).

Las funciones ϕ_s^k y ϕ_d^k satisfacen la condición de ser cero en las fibras superior e inferior de la viga

$$\bar{\phi}_s^0 = \bar{\phi}_s^n = 0 \quad (51)$$

$$\bar{\phi}_d^0 = \bar{\phi}_d^n = 0 \quad (52)$$

De la ecuación (47) se deduce que β_s^k es constante en cada capa y tiene la siguiente expresión

$$\beta_s^k = \frac{\partial(\beta_s^k(z - z_{k-1}))}{\partial z} = \frac{\bar{\phi}_s^k - \bar{\phi}_s^{k-1}}{h^k} \quad (53)$$

donde h_k es el canto de la capa k.

De la ecuación (51) y (53) se deduce que

$$\iint_A \beta_s^k dA = 0 \quad (54)$$

Campo de tensiones y deformaciones

Las relaciones de tensión-deformación se derivan de las ecuaciones (45), (46) y (47) como

$$\varepsilon_x^k = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \phi^k \frac{\partial \psi}{\partial x} = \underbrace{\left[1, -z, (\phi_s^k + \phi_d^k) \right]}_{s_u^k} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\} = S_u^k \hat{\varepsilon}_u \quad (55)$$

$$\gamma_{xz}^k = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[-1 + \beta_s^k + \beta_d \right] \{\psi\} = S_t^k \hat{\epsilon}_t^k \quad (56)$$

donde $\hat{\epsilon}_u^k$ y $\hat{\epsilon}_t^k$ son las deformaciones en el plano (axial-flexión) y deformaciones tangenciales generalizadas respectivamente.

Asumiendo que el material de la capa k-ésima es elástico linear y ortotrópico, las tensiones axial y tangenciales pueden escribirse como

$$\sigma_x^k = E^k \epsilon_x^k = E^k S_u^k \hat{\epsilon}_u^k \quad (57)$$

$$\tau_{xz}^k = G^k \gamma_{xz}^k = G^k S_t^k \hat{\epsilon}_t^k \quad (58)$$

donde E^k y G^k son los módulos longitudinal y transversal respectivamente.

Como mencionamos en líneas anteriores, la continuidad C^1 tiene dificultades para representar correctamente la deformación tangencial y la tensión tangencial en un empotramiento. En un empotramiento se requieren las siguientes condiciones cinemáticas:

$$u_0 = w_0 = \frac{dw_0}{dx} = \psi = 0 \quad (59)$$

Pero si reemplazamos esta condición $\psi=0$ en las ecuaciones (56) y (58) se deduce que la deformación tangencial y la tensión tangencial desaparece en un empotramiento y esto no tiene sentido. Esto se supera teniendo en cuenta que la deformación tangencial de la ecuación (58) es solo una parte de la deformación tangencial total. El resto de la deformación tangencial se mejora si añadimos una función adicional a la deflexión vertical $w_1(x,z)$.

$$w(x, z) = w_0(x) + w_1(x, z) \quad (60)$$

Entonces la deformación tangencial y la tensión tangencial de las ecuaciones (56) y (58) pueden ser escritas como

$$\gamma_{xz}^k = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \underbrace{\left[-1 + \beta_s^k + \beta_d \right] \{\psi\}}_{S_t^k} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = S_t^k \hat{\epsilon}_t^k + \gamma_{xz,1}^k \quad (61)$$

$$\tau_{xz}^k = G^k \gamma_{xz}^k = G^k S_t^k \hat{\epsilon}_t^k + G^k \gamma_{xz,1}^k \quad (62)$$

Esta parte adicional de la deformación tangencial no tiende a fugarse en un soporte empotrado y por tanto el inconveniente discutido en líneas anteriores se ve superado.

En las siguientes líneas de esta formulación no se considera la parte adicional de la deformación tangencial $\gamma_{xz,1}^k$ ya que se considera despreciable en comparación con la energía elástica $S_t^k \hat{\epsilon}_t^k$ y $S_t^k \hat{\epsilon}_t^k$. No obstante deberíamos tener en mente que la deformación tangencial considerada es una parte del total (aunque sea la mayoría).

La distribución real de la tensión por cortante se calcula en el post-proceso integrando la ecuación que gobierna la tensión axial. Sera explicado en el apartado siguiente.

Relaciones constitutivas generalizadas

Las tensiones son definidas como

$$\hat{\sigma}_u = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ M_\phi \end{Bmatrix} = \iint_A [S_u^k]^T \sigma_x^k dA \quad (63)$$

$$\hat{\sigma}_t = \{Q_\phi\} = \iint_A [S_t^k]^T \tau_{xz}^k dA \quad (64)$$

De la relación de las ecuaciones (57) y (58) las tensiones generalizadas pueden ser escritas como

$$\hat{\sigma}_u = \iint_A [S_u^k]^T \sigma_x^k dA = \left(\iint_A [S_u^k]^T S_u^k E^k dA \right) \hat{\epsilon}_u^k = \hat{D}_u \hat{\epsilon}_u^k \quad (65)$$

$$\hat{\sigma}_t = \iint_A [S_t^k]^T \tau_x^k dA = \left(\iint_A [S_t^k]^T S_t^k G^k dA \right) \hat{\epsilon}_t^k = \hat{D}_t \hat{\epsilon}_t^k \quad (66)$$

En las expresiones anteriores N y M son la fuerza axial y el momento flector respectivamente mientras que M_ϕ y Q_ϕ son el momento y fuerza cortante adicionales que se conjugan en la nueva deformación generalizada con $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ y ψ

respectivamente. \hat{D}_u y \hat{D}_t son las matrices generalizadas, que son:

$$\hat{D}_u = \iint_A E_k \begin{bmatrix} 1 & -z & \phi_k \\ -z & z^2 & -z\phi_k \\ \phi_k & -z\phi_k & (\phi_k)^2 \end{bmatrix} dA \quad (67)$$

$$D_t = [D_s] \quad \text{con} \quad D_s = \iint_A G^k (-1 + \beta_s^k + \beta_d)^2 dA \quad (68)$$

Expresión de los trabajos virtuales

La expresión de los trabajos virtuales para una fuerza distribuida $f_s=q$ es

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_x^k \sigma_x^k + \delta \gamma_{xz}^k \tau_{xz}^k) dV - \int_L \delta w q ds = 0 \quad (69)$$

Si sustituimos las ecuaciones (55) y (56) en el primer termino de la última expresión y usamos las ecuaciones (63) y (64) obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_V (\delta \varepsilon_x^k \sigma_x^k + \delta \gamma_{xz}^k \tau_{xz}^k) dV &= \iiint_V (\delta \hat{\varepsilon}_u^T [S_u^k] \sigma_x^k + \delta \hat{\varepsilon}_t^T [S_t^k] \tau_{xz}^k) dV = \\ &= \int_L (\delta \hat{\varepsilon}_u^T \hat{\sigma}_u + \delta \hat{\varepsilon}_t^T \hat{\sigma}_t) dx \end{aligned} \quad (70)$$

Por lo tanto el trabajo virtual queda escrito como

$$\int_L (\delta \hat{\varepsilon}_u^T \hat{\sigma}_u + \delta \hat{\varepsilon}_t^T \hat{\sigma}_t) dx - \int_L \delta w q ds = 0 \quad (71)$$

3.2.1 ELEMENTO DE VIGA COMPUESTA LAMINADA DE DOS NODOS EEBZ2

En las siguientes líneas se formula el elemento llamado EEBZ2 (Elemento de viga de 2 nodos Extendido de Euler Bernoulli basado en la Teoría ZIG-ZAG)

Las variables cinemáticas u_0 y Ψ son discretizadas usando un elemento viga de 2 nodos linear, es decir de continuidad C0, mientras que w es discretizado con un elemento viga de 2 nodos cubico, es decir de continuidad C1. Todo estos elementos tienen una longitud $l^{(e)}$. Por tanto queda

$$u = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \frac{dw}{dx} \\ \psi \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i a_i^{(e)} = N a^{(e)} \quad (72)$$

$$N = [N_1, N_2], \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^c & \bar{N}_i^c & 0 \\ 0 & \frac{dN_i^c}{dx} & \frac{d\bar{N}_i^c}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i^l \end{bmatrix}, \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ w_i \\ \frac{dw}{dx}_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} \quad (73)$$

donde N_i^l son las funciones de forma lineares 1D estándar, y N_i^c y \bar{N}_i^c son las funciones de forma Hermiticas usadas en la Teoría Clásica de Euler-Bernoulli (EBT).

Si sustituimos la ecuación (72) en el vector de deformación generalizado de la ecuación (55) y (56) se obtiene

$$\hat{\varepsilon}_u = B_u a^{(e)}, \quad \hat{\varepsilon}_t = B_t a^{(e)} \quad (74)$$

Y las matrices de deformación generalizadas B_u y B_t son:

$$B_u = [B_{u1} \quad B_{u2}], \quad B_t = [B_{t1} \quad B_{t2}] \quad (75)$$

con

$$\mathbf{B}_{ui} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i^l}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_i^c}{dx^2} & \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2N_i^c}{dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i^l}{dx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ti} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i^l \end{bmatrix} \quad (76)$$

Donde \mathbf{B}_{ui} y \mathbf{B}_{ti} son las matrices de deformación en el plano y tangencial para el nodo i .

Los desplazamientos virtuales y el campo de deformación generalizada se expresan en términos del grado de libertad nodal virtual como

$$\delta \mathbf{u} = N \delta \mathbf{a}^{(e)}, \quad \delta \hat{\varepsilon}_u = \mathbf{B}_u \delta \mathbf{a}^{(e)}, \quad \delta \hat{\varepsilon}_t = \mathbf{B}_t \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad (77)$$

Sustituyendo las ecuaciones (63), (64), (72), (74), y (77) en la ecuación (71) del trabajo virtual y si se sigue mediante el clásico proceso de MEF se obtienen la ecuación de equilibrio discretizada que es:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f}_{ext} = \left[\sum_{e=1}^{nelem} \int_{l^{(e)}} (\mathbf{B}_u^T \hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_t^T \hat{\mathbf{D}}_t \mathbf{B}_t) dx \right] \mathbf{a} - \sum_{e=1}^{nelem} \left[\int_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx \right] = 0 \quad (78)$$

donde \mathbf{K} es la matriz global de rigidez, \mathbf{a} es el vector de grados de libertad nodal para toda la malla, \mathbf{f}_{ext} es el vector externo de fuerzas y $\mathbf{q} = (0 \ q \ 0 \ 0)^T$.

En líneas posteriores, y en la Figura 3.3, se presenta la formulación a realizar para calcular una distribución exacta de la tensión tangencial, τ_{xz}^k , a lo largo del canto de la sección transversal. Para calcular dicha tensión será necesario tener en cuenta las ecuaciones de equilibrio de Cauchy.

Las ecuaciones de equilibrio de Cauchy son:

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} \quad (79)$$

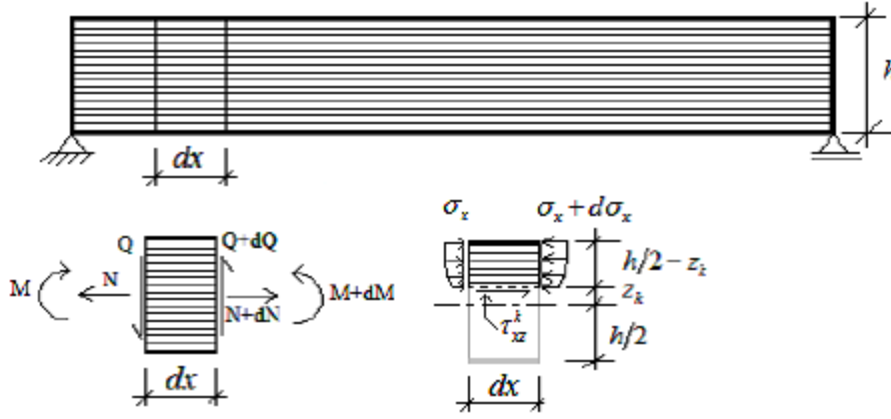


Figura 3.3 Equilibrio seccional

Por lo tanto la tensión tangencial se puede computar como

$$\tau_{xz}^k = \int_{z_k}^{h/2} -\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz = \int_{-h/2}^{z_k} -\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \quad (80)$$

La derivada de la tensión axial $\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x}$ puede ser calculada teniendo en cuenta la ecuación (55) y (57). Por lo tanto tenemos que

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} = E^k \frac{d^2 u_0}{dx^2} - E^k z \frac{d^3 w_0}{dx^3} + E^k \left(\phi_s^k(z) + \phi_d^k(z) \right) \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (81)$$

Como las variables $u_0(x)$ y $\psi(x)$ tienen campos de interpolación lineal se puede usar la siguiente expresión para obtener una expresión aproximada de la segunda derivada:

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{dN_1^l}{dx} \frac{\overline{du_{01}}}{dx} + \frac{dN_2^l}{dx} \frac{\overline{du_{02}}}{dx} \quad (82)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{dN_1^l}{dx} \frac{\overline{d\psi_1}}{dx} + \frac{dN_2^l}{dx} \frac{\overline{d\psi_2}}{dx} \quad (83)$$

donde $\frac{du_{01}}{dx}$, $\frac{du_{02}}{dx}$, $\frac{d\psi_1}{dx}$ y $\frac{d\psi_2}{dx}$ son los valores suavizados en el final de los nodos.

Sustituyendo la ecuación (81) en la ecuación (80) se obtiene la siguiente expresión para la tensión tangencial la cual queda así:

$$\bar{\tau}_{xz}^k = - \left(\int_{-h/2}^z E^k dz \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \left(\int_{-h/2}^z E^k z dz \right) \frac{d^3 w_0}{dx^3} - \left(\int_{-h/2}^z E^k \left(\phi_s^k(z) + \phi_d^k(z) \right) dz \right) \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (84)$$

CALCULO DEL PARAMETRO β_s^k

Para el cálculo del parámetro β_s^k se pueden considerar dos situaciones:

- Considerando vigas que tienen capas con propiedades mecánicas similares. En este caso los efectos de distorsión por deformación elástica de cortante son de baja relevancia. Sin embargo, la distribución de la deformación tangencial en la sección transversal podrá ser más aproximada usando la función zigzag.
- O considerando vigas con propiedades mecánicas diferentes. En contraposición a la primera situación, será necesario que reproduzca adecuadamente los efectos de la distorsión ya que puede tener gran relevancia para tener una respuesta exacta del modelo. Para ello, tendremos que considerar una distribución constante a lo largo del canto de la deformación tangencial. Esto tiene en cuenta la distorsión en la capa en un sentido medio.

Como el análisis de elementos viga de M.L.E. se asemeja a la segunda situación, es la que explicaremos en este apartado.

Como mencionamos en líneas anteriores, en vigas con propiedades mecánicas diferentes en sus capas, se asume una distribución constante de la tensión tangencial en la sección transversal.

Por lo tanto de la ecuación (56) se obtiene

$$\tau_{xz}^k = G^k (-1 + \beta_s^k + \beta_d) \psi = cte \quad (85)$$

Esto se logra limitando, para que sea constante, el termino multiplicador ψ de la ecuación (85); y por tanto

$$G^k (-1 + \beta_s^k + \beta_d) = G^{k+1} (-1 + \beta_s^{k+1} + \beta_d) = -G = cte \quad (86)$$

De la ecuación (86) se puede deducir

$$\beta_s^k = 1 - \beta_d - \frac{G}{G^k} \quad (87)$$

Y sustituyendo β_s^k en la integral de la ecuación (54) nos da

$$G = \text{Max} \left[\langle 1 - \beta_d \rangle h \left[\sum_{k=1}^{n_{layers}} \frac{h^k}{G^k} \right]^{-1}, G_{\min} \right] \quad (88)$$

que es el modulo transversal equivalente para el laminado.

Reemplazando la ecuación (87) en la ecuación (85) se obtiene:

$$\tau_{xz}^k = -G\psi = cte \quad (89)$$

3.2.2 EJEMPLOS NUMERICOS

Con el propósito comparar el comportamiento del elemento frente a un elemento TBT, y frente a otro de 4 nodos de Teoría Plana de Tensiones (PS) se analizan a continuación dos ejemplos numéricos. Se realiza cada ejemplo numérico mediante cada uno de los tres tipos de elementos en vigas compuestas laminadas con capas de muy diferente propiedades mecánicas y en dos configuraciones tipo que son las siguientes:

- Viga gruesa no simétrica de tres laminas biapoyada bajo carga permanente
- Viga delgada no simétrica de diez laminas biempotrada bajo carga uniforme

Cada uno de estos ejemplos numéricos se ha mallado con las siguientes mallas y se han obtenido resultados parejos en cada uno de ellos. Las mallas utilizadas han sido:

- EEBZ2-10 (malla de 10 elementos EEBZ2)
- EEBZ2-20 (malla de 20 elementos EEBZ2)
- TBT-50 (malla de 50 elementos TBT)
- PS-8000 / PS-40000 respectivamente en cada ejemplo (malla de 8000 y 40000 elementos de 4 nodos)

Viga biapoyada de tres laminas

En este ejemplo numérico las tres láminas tienen el mismo espesor pero diferentes propiedades mecánicas cada una. La lamina central tiene bajos valores para el modulo longitudinal y transversal. La Figura 3.4 y la Tabla 3.1 describen la configuración de dicha viga.

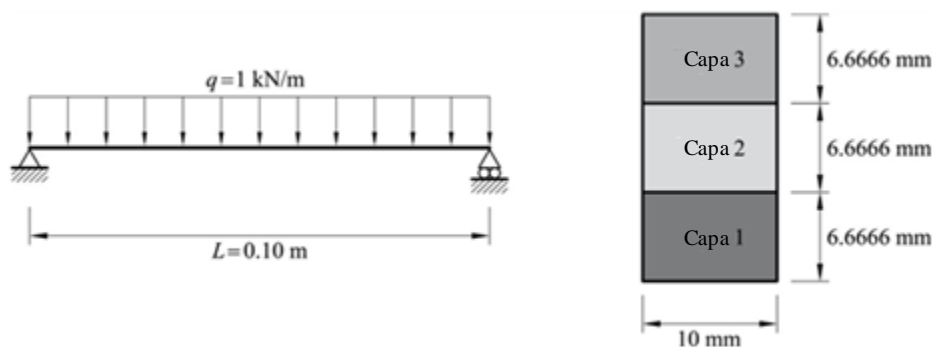


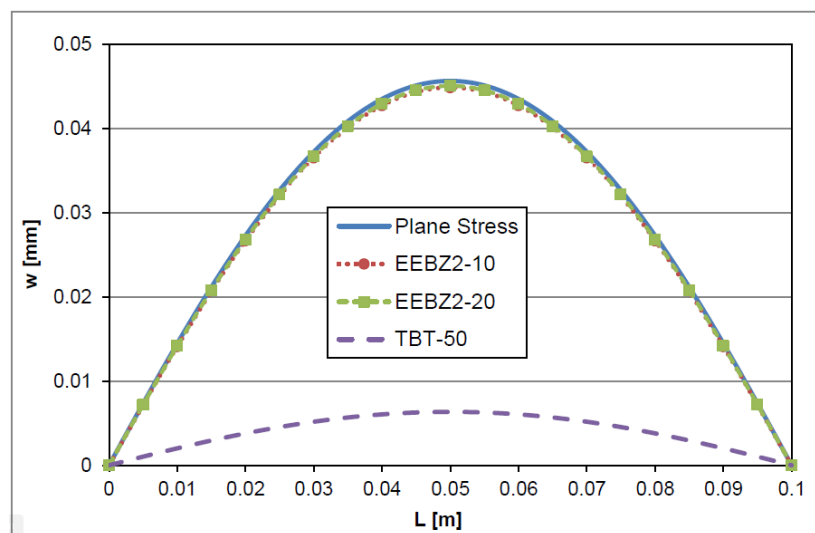
Figura 3.4 Viga gruesa biapoyada de tres laminas bajo carga uniforme

	Capa 1	Capa 2	Capa 3
h [mm]	6.6666	6.6666	6.6666
E [MPa]	2.19e5	5.30e2	7.30e5
G [MPa]	0.876e5	2.12e2	2.92e5

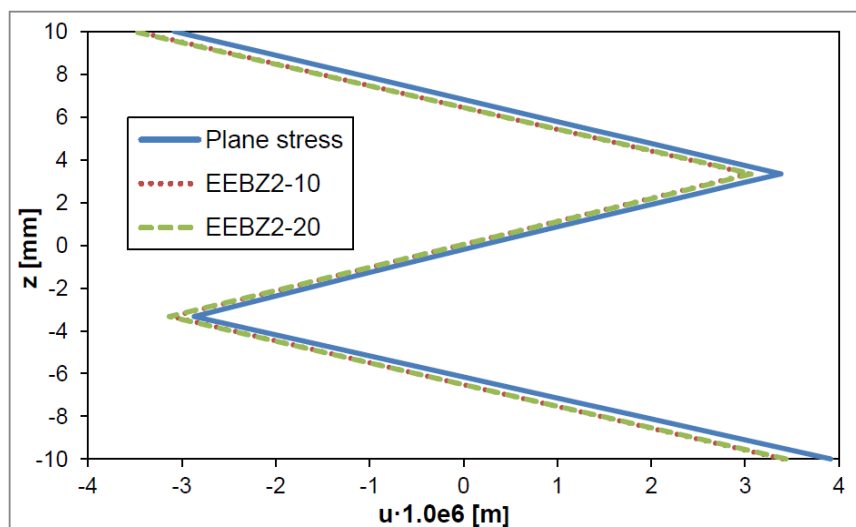
Tabla 3.1 Propiedades materiales de la Viga gruesa biapoyada tri-laminada no simétrica

La viga ha sido analizada con las mallas descritas anteriormente formadas por elementos EEBZ2-10 y elementos EEBZ2-20. Los resultados obtenidos con las mallas anteriores se han comparado con los resultados obtenidos por las mallas de elementos TBT-50 y elementos PS-8000.

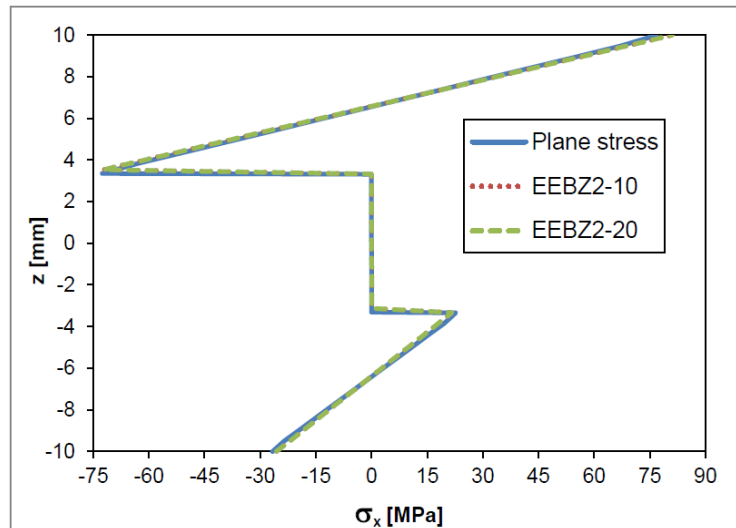
En la Grafica 3.1 aprecian los valores de la flecha a lo largo de la longitud de la viga y se aprecia que los valores obtenidos mediante el elemento TBT son significativamente más rígidos.



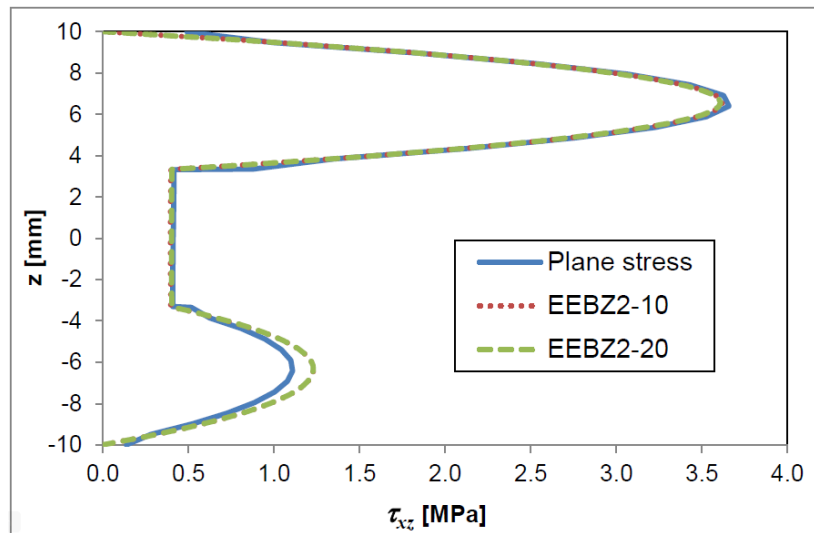
Grafica 3.1 Distribución de la flecha a lo largo de la longitud



Grafica 3.2 Distribución del desplazamiento axial u a lo largo del espesor en $x=L/4$



Grafica 3.3 Distribución de tensión axial σ_x a lo largo del espesor en $x=L/4$



Grafica 3.4 Distribución de la tensión tangencial τ_{xz} a lo largo del espesor en $x=L/4$

En la Grafica 3.2, Grafica 3.3 y Grafica 3.4 referentes respectivamente al desplazamiento axial u , a la tensión axial σ_x y a la tensión tangencial τ_{xz} a lo largo del espesor de la viga en la sección $x=L/4$, se puede apreciar como el elemento EEBZ2-10 obtiene unos muy adecuados resultados en comparación con los elementos en estado plano de tensiones PS.

Viga biempotrada de diez laminas

En este ejemplo numérico las diez láminas que componen la sección transversal de la viga tienen muy diferente espesor y diferentes propiedades mecánicas cada una. La viga tiene una configuración no-simétrica esbelta, de un ratio de $\lambda=20$, con la configuración laminar descrita en la Tabla 3.2. La Figura 3.5 se describe dicha viga.

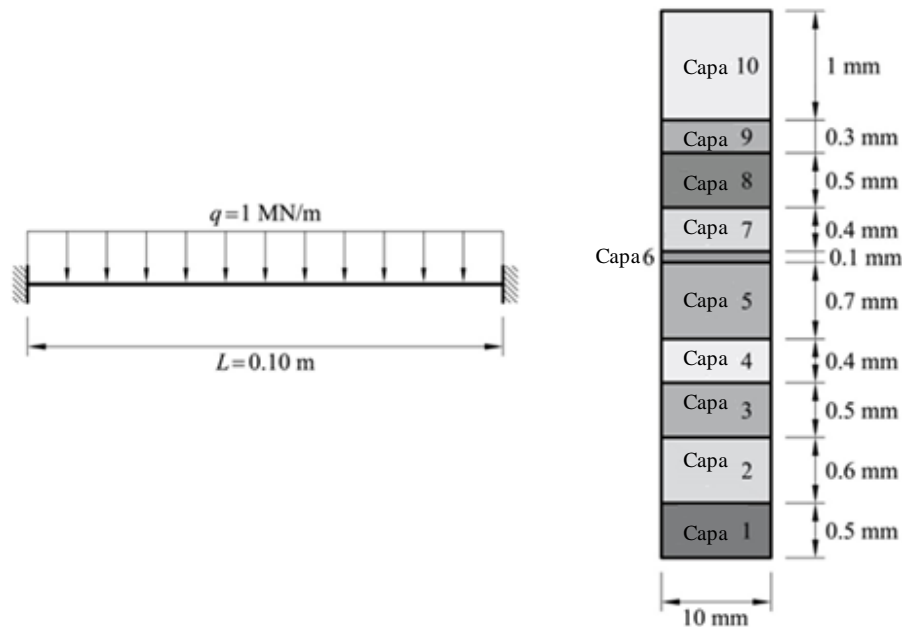


Figura 3.5 Viga esbelta biempotrada de diez laminas bajo carga uniforme

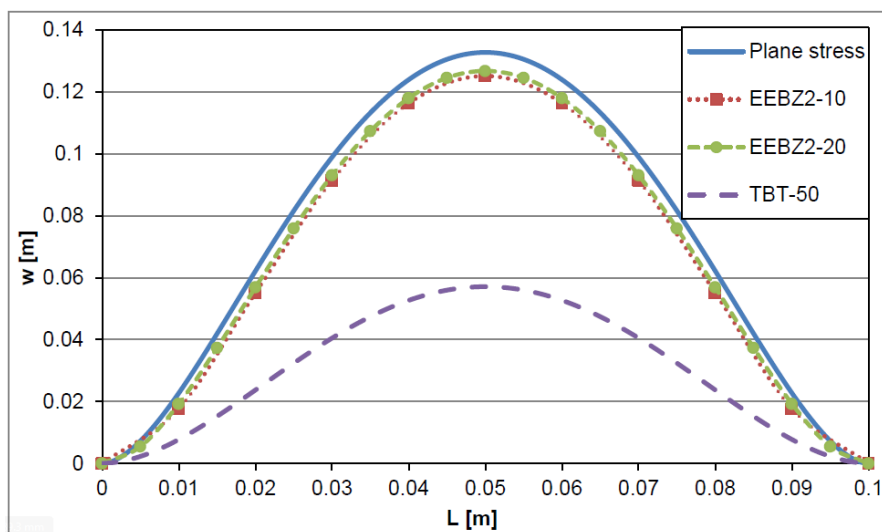
	h [mm]	E [MPa]	G [MPa]
Capa 1	0.5	5.30e5	2.12e5
Capa 2	0.6	2.19e5	0.876e5
Capa 3	0.5	0.82e5	0.328e5
Capa 4	0.4	7.30e2	2.92e2
Capa 5	0.7	5.30e5	2.12e5
Capa 6	0.1	7.30e2	2.92e2
Capa 7	0.4	7.30e5	2.92e5
Capa 8	0.5	0.82e5	0.328e5
Capa 9	0.3	2.19e5	0.876e5
Capa 10	1.0	7.30e5	2.92e5

Tabla 3.2 Propiedades materiales de la Viga esbelta biempotrada deca-laminada no simétrica

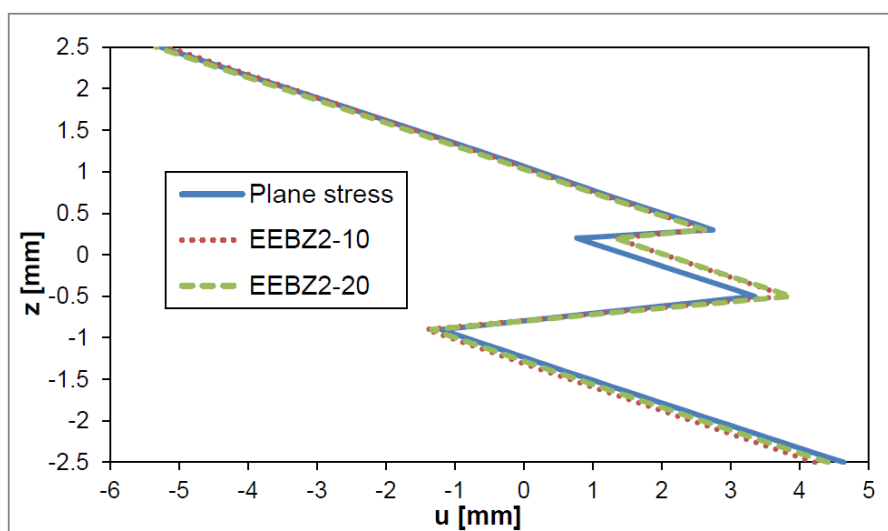
La viga ha sido analizada con las mallas descritas anteriormente formadas por elementos EEBZ2-10 y elementos EEBZ2-20. Los resultados obtenidos con las mallas anteriores se han comparado con los resultados obtenidos por las mallas de elementos TBT-50 y elementos PS-000.

En la Grafica 3.5 los valores de la flecha a lo largo de la longitud de la viga y se aprecia que los resultados obtenidos con la malla de elementos EEBZ2-10 en comparación con los resultados obtenidos por la malla de elementos Ps proporcionan

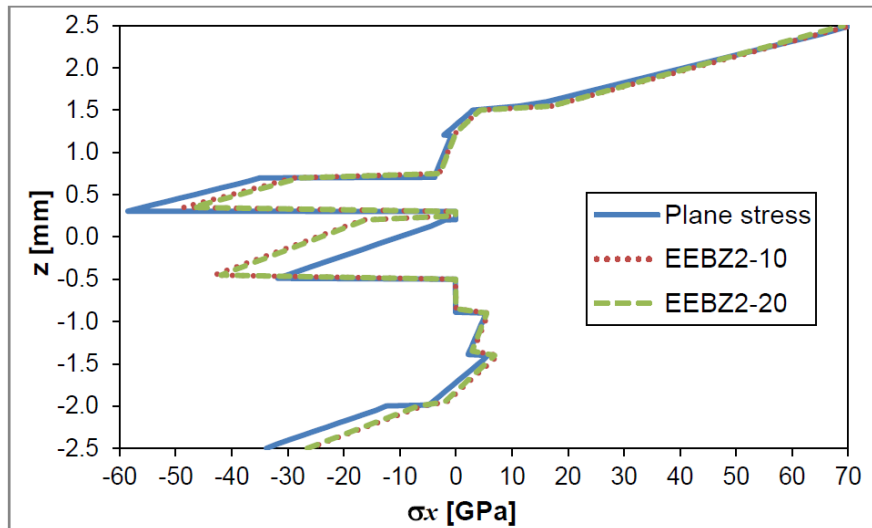
un error de alrededor del 6%. De modo similar al ejemplo anterior, los valores obtenidos mediante el elemento TBT están lejos de los valores correctos.



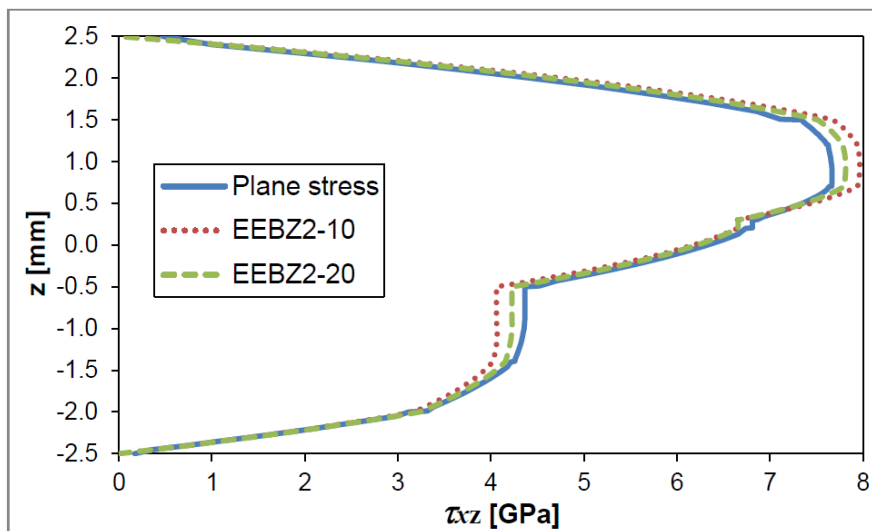
Grafica 3.5 Distribución de la flecha a lo largo de la longitud



Grafica 3.6 Distribución del desplazamiento axial u a lo largo del espesor en $x=L/4$



Grafica 3.7 Distribución de tensión axial σ_x a lo largo del espesor en $x=L/4$



Grafica 3.8 Distribución de la tensión tangencial τ_{xz} a lo largo del espesor en $x=L/4$

En la Grafica 3.6, Grafica 3.7 y Grafica 3.8 referentes respectivamente al desplazamiento axial u , a la tensión axial σ_x y a la tensión tangencial τ_{xz} a lo largo del espesor de la viga en la sección $x=L/4$, se puede apreciar como nuevamente el elemento EEBZ2-10 obtiene unos muy adecuados resultados en comparación con los elementos en estado plano de tensiones PS.

3.2.3 MODELO DE DELAMINACION

Del mismo modo a los ejemplos descritos en el apartado anterior, en las siguientes líneas se realiza un ejemplo numérico del modelado de la delaminación de una viga gruesa de tres laminas en voladizo con elementos EEBZ2. Para su realización, se ha modelado la situación de delaminación de una viga gruesa rectangular en voladizo bajo carga puntual en el extremo libre. Dicha viga está compuesta de 3 capas, con las propiedades descritas en la Tabla 3.3, y tiene un ratio de esbeltez $\lambda=5$. En la Figura 3.6 se describe dicha viga.

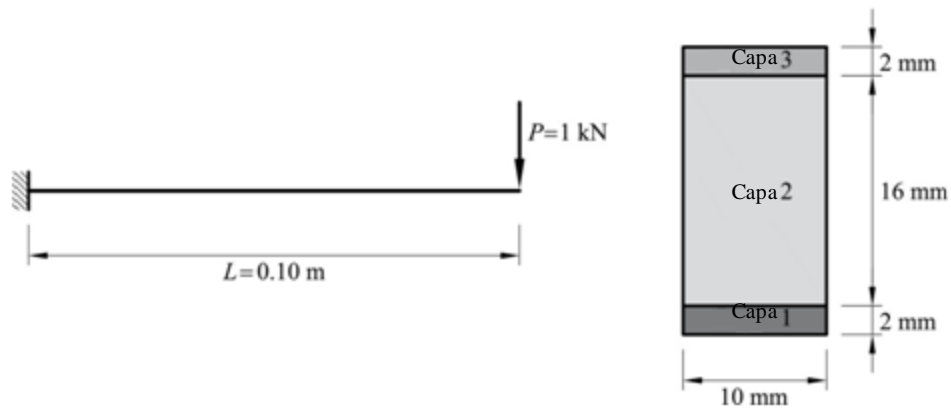


Figura 3.6 Viga gruesa de tres laminas en voladizo bajo carga puntual

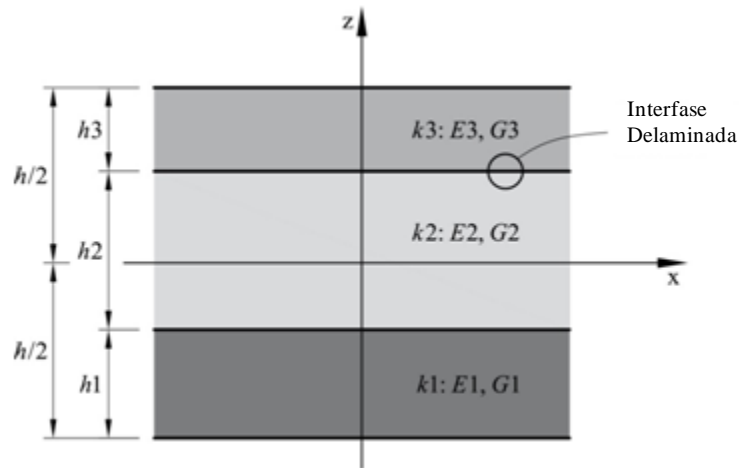


Figura 3.7 Modelado de una interfase de espesor cero para el análisis de la delaminación

	Layer 1	Layer 2	Layer 3
h [mm]	2	16	2
E [MPa]	7.30e5	7.30e2	2.19e5
G [MPa]	2.92e5	2.20e2	8.76e4

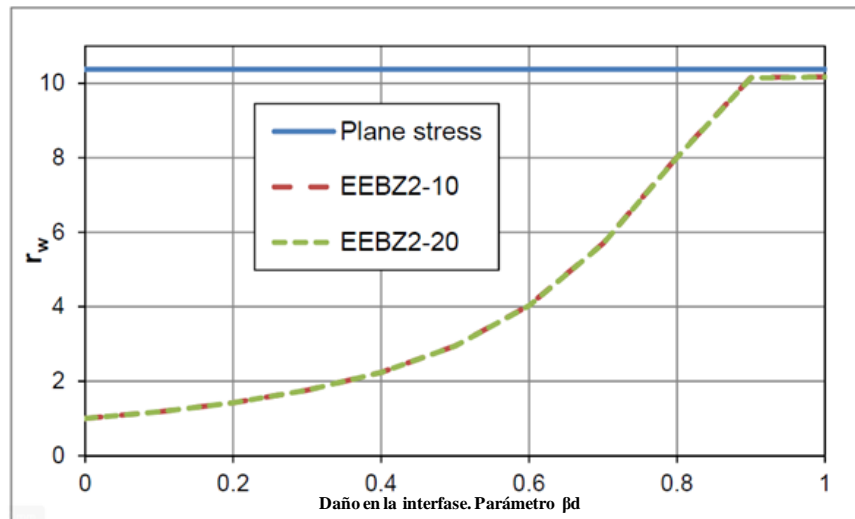
Tabla 3.3 Propiedades materiales de la viga no simétrica de tres laminas en voladizo

La delaminación se ha modelado mediante la introducción de una capa de grosor cero, como se aprecia en la Figura 3.7, en la interfase entre la capa superior y la capa del núcleo de la viga, y el grado de delaminación se ha controlado por medio del parámetro β_d que toma los valores entre 0 (no delaminado) y 1 (delaminación total).

Se ha analizado la viga descrita y se han comparado los resultados de dos mallas, en Teoría Zig-Zag Refinada extendida de Euler-Bernoulli, de EEBZ2-10 y EEBZ2-20, con una malla en Teoría de estado Plano de Tensiones PS-18240 (malla de 18240 elementos de 4 nodos). En el estado Plano de Tensiones la interfase de delaminación se ha modelado con una fila fina ($h=0.01\text{m}$) de elementos a los que se les ha cambiado el módulo transversal G en dos etapas.

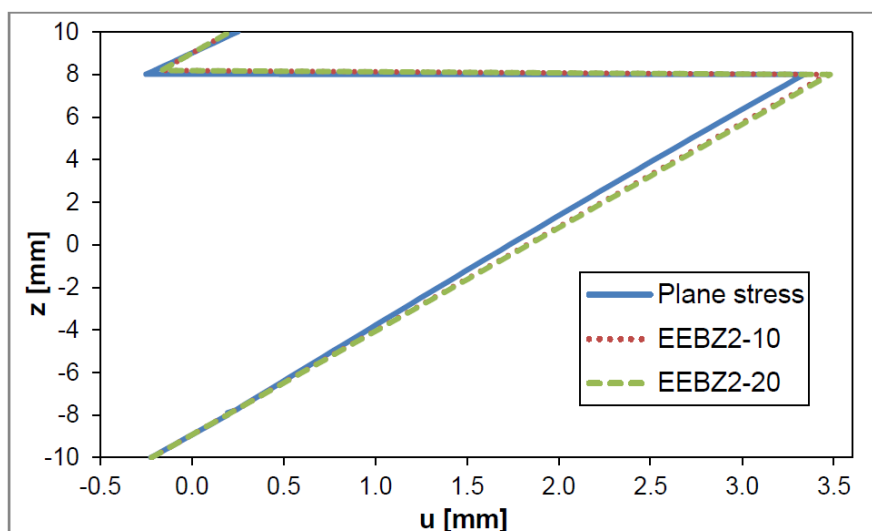
En la primera etapa, a la malla de la interfase, se le ha asociado un $G=8.76 \cdot 10^4$ (delaminación nula) y en la segunda un $G=8.76 \cdot 10^{-7}$ (delaminación total).

En el caso del modelado de en la Teoría Refinada extendida de Euler-Bernoulli, la delaminación se ha estudiado mediante la variación del parámetro β_d . Para ambos modelados se ha ido midiendo la deflexión en el punto del extremo libre de la viga y se ha representado la Gráfica 3.9 donde se ve la deflexión normalizada ($W_{\beta_d=0} / W_{\beta_d=1}$) obtenida en función de los valores de adoptados β_d .

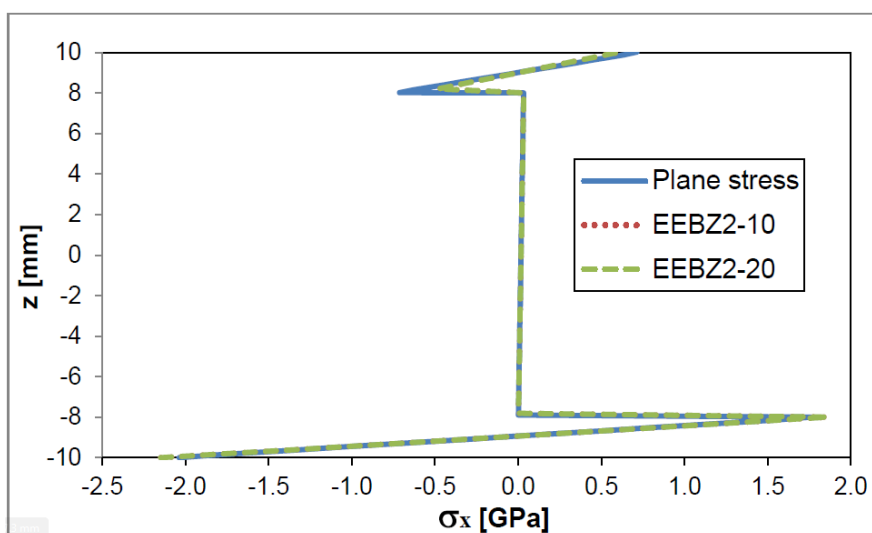


Gráfica 3.9 Estudio de delaminación. Evolución de la flecha en función del parámetro β_d

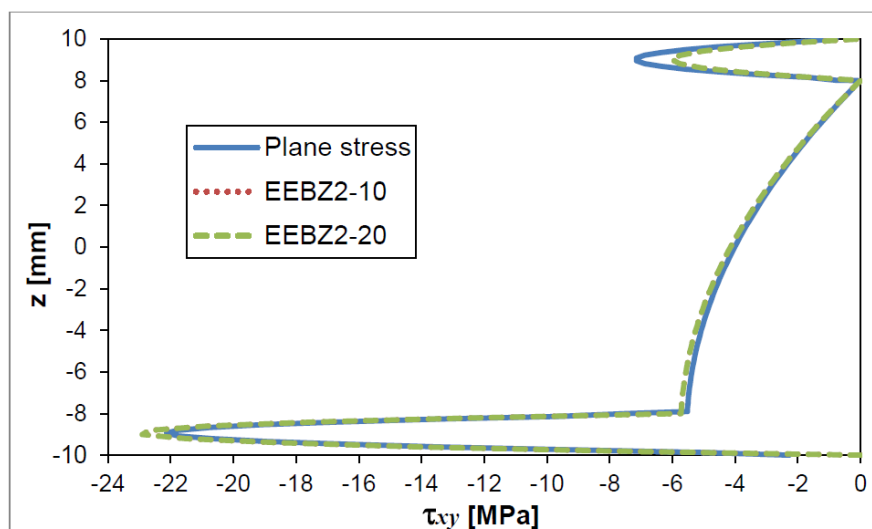
En la Gráfica 3.10, Gráfica 3.11 y Gráfica 3.12 se presentan respectivamente el desplazamiento axial u , la tensión axial σ_{xz} y la tensión tangencial τ_{xz} a lo largo del espesor de la viga en la sección $x=L/2$



Grafica 3.10 Distribución del desplazamiento axial u a lo largo del espesor en $x=L/2$



Grafica 3.11 Distribución de tensión axial σ_x a lo largo del espesor en $x=L/2$



Grafica 3.12 Distribución de la tensión tangencial τ_{xy} a lo largo del espesor en $x=L/2$

Concluido el análisis se puede observar como en el peor de los casos el error obtenido con la malla EEBZ2-10 respecto a la malla en estado Plano de Tensiones PS-18240 en referencia al estudio de delaminacion y la variación de la flecha ha sido menor al 2%.

Los resultados obtenidos del desplazamiento axial, tensión axial y tensión tangencial de la mallas de EEBZ2-10 en comparación con la malla de elementos en estado plano de tensiones PS-18240 son muy acertados.

3.2.4 CONCLUSIONES

En este apartado se ha presentado el elemento EEBZ2 para el análisis de materiales compuestos laminados y vigas sándwich. Dicho elemento tiene unos campos cinemáticos basados en el elemento RZT y EBT, y es capaz de tener en cuenta los efectos de la distorsión ocasionados por la deformación tangencial y las situaciones de delaminacion.

Dicho elemento tiene cuatro grados de libertad por nodo que se resuelven con una interpolación cubica de Hermite C^1 para la flecha y una interpolación lineal C^0 para las demás variables.

Las aparentes dificultades teóricas de las interpolaciones C^1 de la flecha para representar correctamente la deformación tangencial en un empotramiento son superadas considerando que la deformación por cortante es solo una parte de la deformación total tangencial. Se ha visto que esta parte del total de la deformación por cortante es suficiente para dar aproximaciones exactas del desplazamiento vertical a lo largo de la viga y también de la distribución del desplazamiento y la tensión axial en el canto de la sección. La distribución mejorada de la tensión tangencial total se obtiene en el post-proceso integrando las ecuaciones de equilibrio a partir de los valores de la tensión axial.

Se ha comprobado que hay algunas ventajas de la interpolación cubica C^1 frente a la interpolación C^0 para la deflexión vertical. Una es que el elemento resultante esta libre del bloqueo por cortante y por tanto la matriz de rigidez puede ser calculada usando una integración exacta. Otra de ellas es que el ratio de convergencia de resultados es más rápido que en otros elementos existentes usados para el mismo fin.

Los efectos de la delaminación se modelan incorporando una adicional función Zig-Zag correspondiente a la cinemática de una capa de delaminación de espesor cero. Este método evita la necesidad de elegir valores pequeños de espesor y modulo transversal para simular la delaminación de una capa de interface muy delgada.

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado, y después de presentar en el apartado anterior el elemento de viga compuesta laminada de dos nodos de Euler-Bernoulli (EBBZ2), se pretende realizar unos ejemplos numéricos aplicando para ello dicho elemento.

4.1 PLANTEAMIENTO DE LOS EJEMPLOS

Los ejemplos numéricos tendrán el objetivo de analizar la que podría ser una viga de M.L.E. real, y para ello se ha acudido al catalogo de una empresa que fabrica y distribuye dichos elementos con la intención de obtener datos reales. En la Tabla 4.1 y Tabla 4.2 se pueden observar las especificaciones que en el catalogo se recogen sobre las vigas de M.L.E.

MADERA LAMINADA ENCOLADA BSH, VALORES CARACTERÍSTICOS PARA LA MEDICIÓN EN 1995-1-1:2010-12, DIN 1052:2008

Material	Madera laminada encolada combinada			Madera laminada encolada homogénea		
Clase de resistencia	GL 24c	GL 28c	GL 32c	GL 24h	GL 28h *	GL 32h *
Valores de resistencia (N/mm²)						
Flexión ($f_{m,k}$)	24	28	32	24	28	32
Tracción: paralela ($f_{t,0,k}$)	14	16,5	19,5	16,5	19,5	22,5
Tracción: perpendicular ($f_{t,90,k}$)	0,35	0,4	0,45	0,4	0,45	0,5
Presión: paralela ($f_{c,0,k}$)	21	24	26,5	24	26,5	29
Valores de rigidez (N/mm²)						
Módulo de elasticidad: paralelo ($E_{0,mean}$)	11.600	12.600	13.700	11.600	12.600	13.700
Módulo de elasticidad: perpendicular ($E_{90,mean}$)	320	390	420	390	420	460
Módulo de cizalladura: G_{mean}	590	720	780	720	780	850
Valores característicos de densidad aparente (kg/m³)						
Densidad aparente ρ_k	350	380	410	380	410	430

* bajo pedido

Tabla 4.1 Valores característicos

Tipo de madera	Abeto rojo
Clases de resistencia*	GL 24c, GL 28c, GL 32c, I GL 24h, GL 28h, GL 32h
Calidad	Calidad vista, calidad no vista
Encolado de superficies y empalmes dentados	Resina de melamina modificada, para NKL 1-3, resistente a los rayos UV y la intemperie, claro
Anchura	100-480 mm (en pasos de 20 mm, a partir de 260 mm encolado en bloque)
Altura	Hasta 2000 (en pasos de 40 mm)
Longitudes	6 - 32,5 m *

Tabla 4.2 Especificaciones técnicas

Para realizar el análisis, se parte de una situación real en la que la viga de directriz recta a analizar constituye el elemento principal de la estructura de una cubierta plana de madera.

Dicha cubierta está formada por una cubrición de madera contralaminada de 20 cm de espesor, a modo de soporte base, que apoya sobre unas vigas rectas de M.L.E. de 20 m de longitud que distan 5 m entre sus ejes. Las especificaciones de los elementos de cubrición se han obtenido del mismo catalogo que para las vigas de M.L.E. En la Figura 4.1 se describe gráficamente el problema.

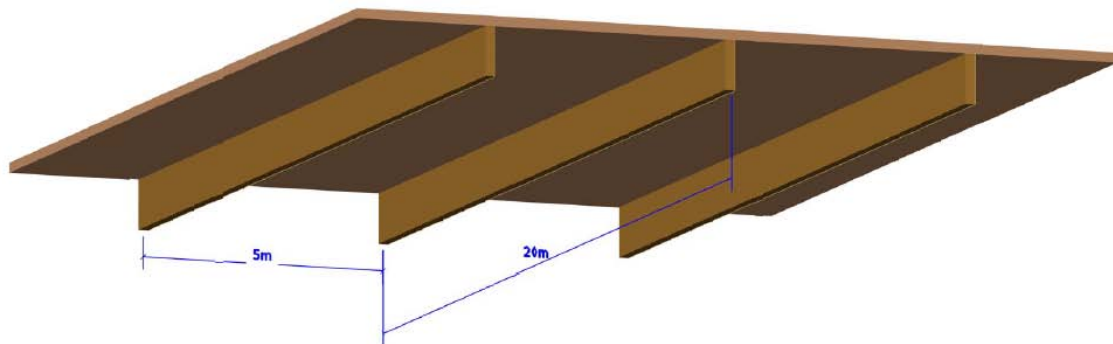


Figura 4.1 Descripción grafica del problema

Las acciones consideradas para el análisis son las de peso propio de los elementos que constituyen la estructura y la acción de nieve, situando la estructura en una zona 1 a una altitud de alrededor de los 500 m sobre el nivel del mar. Los pesos específicos y las acciones de nieve se han obtenido a partir del catalogo, para los pesos específicos, y a partir del DB-AE (Acciones en la Edificación) del CTE (Código Técnico de la Edificación) para la sobrecarga de nieve. Las acciones consideradas son las siguientes:

- Peso propio de la Viga de M.L.E.: en cada problema varia la densidad y las dimensiones.
- Peso propio de la cubrición: 350kg/m^3
- Sobrecarga de nieve: 0.7kN/m^2

El análisis se ha realizado en un Estado Limite de Servicio (E.L.S.) ya que los parámetros que se ha estudiado posteriormente han sido las deformaciones sufridas por el elemento.

Por ello se ha aplicado la combinación de acciones característica, que según el apartado 4.3.2 *Combinación de acciones* del CTE_DB-SE es la presentada en la siguiente expresión.

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

De este modo, teniendo en cuenta que la sección transversal de la viga es de 1m x 0,2m y que se trata, en el *Ejemplo N°1*, de un material *GL28h* (ver pesos específicos en la Tabla 4.1 **Valores característicos**), tenemos que sobre nuestra viga recaerá una carga de:

- Sobrecarga de nieve: $700N / m^2 \cdot 5m = 3500N / m$
- Peso propio cubrición: $350kg / m^3 \cdot 10N / kg \cdot 0,2m \cdot 5m = 3500N / m$
- Peso propio viga: $410kg / m^2 \cdot 10N / kg \cdot 0,2m \cdot 1m = 820N / m$
- Carga lineal TOTAL: 7820 N/m

Del mismo modo, el *apartado 4.3.3.1* Flechas del CTE_DB-SE establece que una estructura horizontal, en los casos donde no hay tabiques frágiles, ni tabiques ordinarios, ni pavimentos rígidos, se considera suficientemente rígida si la flecha relativa es menor que un 1/300 de la Luz.

- Por lo tanto la flecha máxima permitida será: $20m/300 = 0.067m$

Este límite nos servirá para orientarnos sobre la deformación sufrida por el elemento en el problema planteado.

En los posteriores apartados se desarrollan los diferentes ejemplos numéricos que son:

- Viga de M.L.E. de clase resistente GL28h
- Viga de M.L.E de clase resistente GL28c
- Modelado de la delaminación de los ejemplos anteriores.

Por último apuntar que el software utilizado para la realización de dichos ejemplos ha sido el GiD versión 12.0.2, para el pre-proceso y post-proceso de los datos del problema, en el cual se ha integrado el Ramseries_Educacional_2D-VIGAS LAMINADAS como procesador para el cálculo del problema.

4.2 EJEMPLO N°1: VIGA DE M.L.E. DE CLASE RESISTENTE GL28h BIAPOYADA CON CARGA UNIFORME

El primer ejemplo numérico constituye una viga de M.L.E. de Clase Resistente GL28h biapoyada con carga uniforme. Esta clase resistente corresponde a una viga que está compuesta, en toda su sección transversal, de láminas homogéneas de madera aserrada de clase resistente C30. Como se puede apreciar en la Figura 4.3 dichas láminas tienen un espesor de 4cm y una anchura de 20cm; por lo tanto la viga de 1m de canto está compuesta de 25 láminas. El material adhesivo que une las láminas es una cola de Melamina Urea Formaldehído (MUF) de 0,1mm de espesor. Las características de los materiales mencionados se pueden observar en la Tabla 4.3.

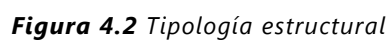


Diagrama de un panel laminado de 1,00 m de altura y 0,2 m de anchura. El panel está compuesto por 16 capas de madera maciza de clase C30 (representadas por rectángulos amarillos con líneas horizontales) y 15 capas de adhesivo de melamina urea formaldehído (MUF) (representadas por líneas rojas). La espesor de cada capa de madera es de 0,04 m y el de cada capa de adhesivo es de 0,001 m. Una etiqueta "ADHESIVO MUF (e=0,1mm)" apunta a una de las capas de adhesivo.

Figura 4.3 Sección transversal de GL28h

Propiedades de los Materiales		
	E (N/mm ²)	G (N/mm ²)
C.R. C30	12000	750
MUF	9000	2400

Tabla 4.3 *Propiedades de los materiales*

Pre-proceso

Se ha comenzado por cargar el tipo de problema a analizar (VIGAS LAMINADAS_Ramseires Educacional 2D) y se ha seguido introduciendo los datos en el pre-procesador GiD. En la Figura 4.4, Figura 4.5 y Figura 4.6 se observa como se ha realizado la introducción de las condiciones de contorno, las acciones y las propiedades de los materiales.

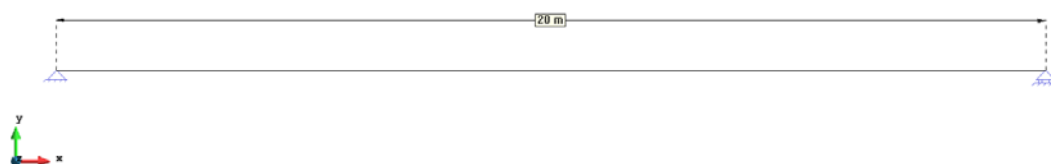


Figura 4.4 Geometría



Figura 4.5 Cargas actuantes

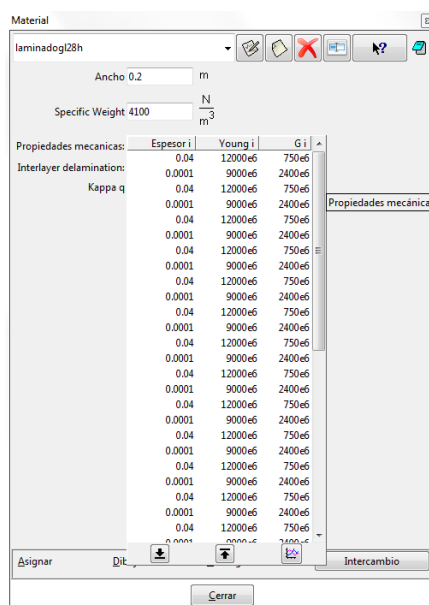


Figura 4.6 Propiedades

Para finalizar se ha mallado el modelo con elementos de dos nodos EEBZ2 de 1 metro de longitud. Se ha creado la malla EEBZ2-20 de 20 elementos y 21 nodos que se puede observar en la Figura 4.7. Decir que a pesar de conocer la rápida convergencia de dicho elementos se ha realizado una segunda malla el doble de refinada para comprobar dicha convergencia. La malla creada se ha realizado con elementos de 0.5m de longitud. Los resultados de ambas mallas se podrán observar en el apartado del post-proceso.



Figura 4.7 Malla

Proceso

Se ha procedido al cálculo mediante el modulo de VIGAS LAMINADAS del Ramseries Educacional_2D. Se han obtenido los resultados visibles en el posterior apartado.

Post-proceso

Lo primero que se realiza es una comprobación de la convergencia de los resultados para ambas mallas descritas en el pre-proceso. La comprobación se ha realizado comparando el resultado de la flecha en $x=L/2$. Los resultados de las flechas para ambas mallas, EEBZ2-20 y EEBZ2-40, han sido idénticos con un valor de 83,513 mm en ambos casos.

Por tanto se puede decir que, como se suponía, el elemento EEBZ2 converge rápido y que la malla de diez elementos EEBZ2-10 nos dará resultados adecuados. En la Figura 4.8 se observan la deformada y la flecha (desplazamiento en el eje y) a lo largo de la longitud de la viga.

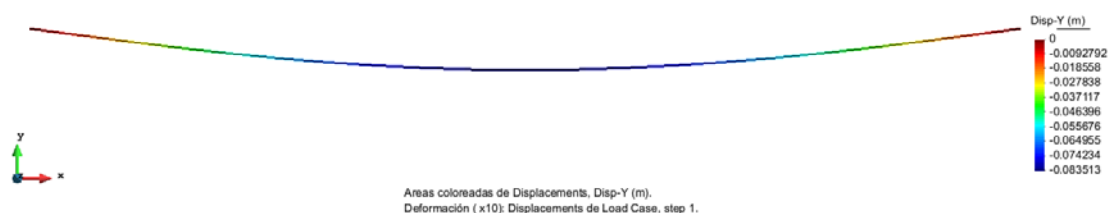


Figura 4.8 Deformada y flecha

La Figura 4.9 y la Figura 4.10 muestran las solicitaciones de flexión y de cortante que sufre la viga.

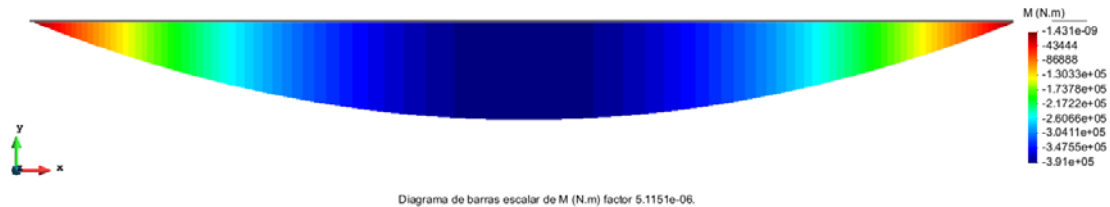


Figura 4.9 Solicitación de flexión

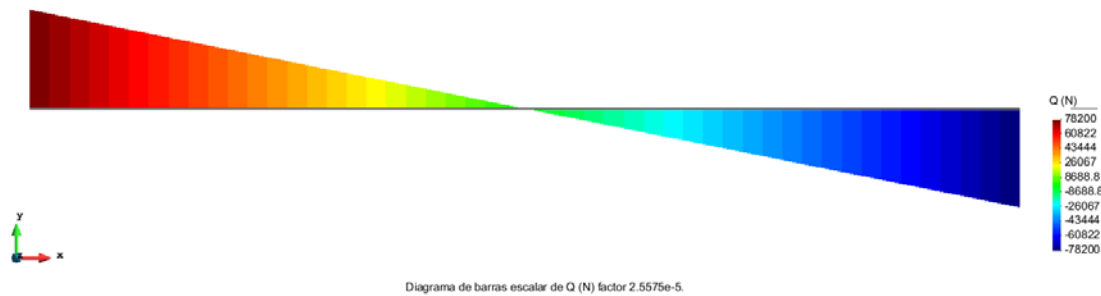
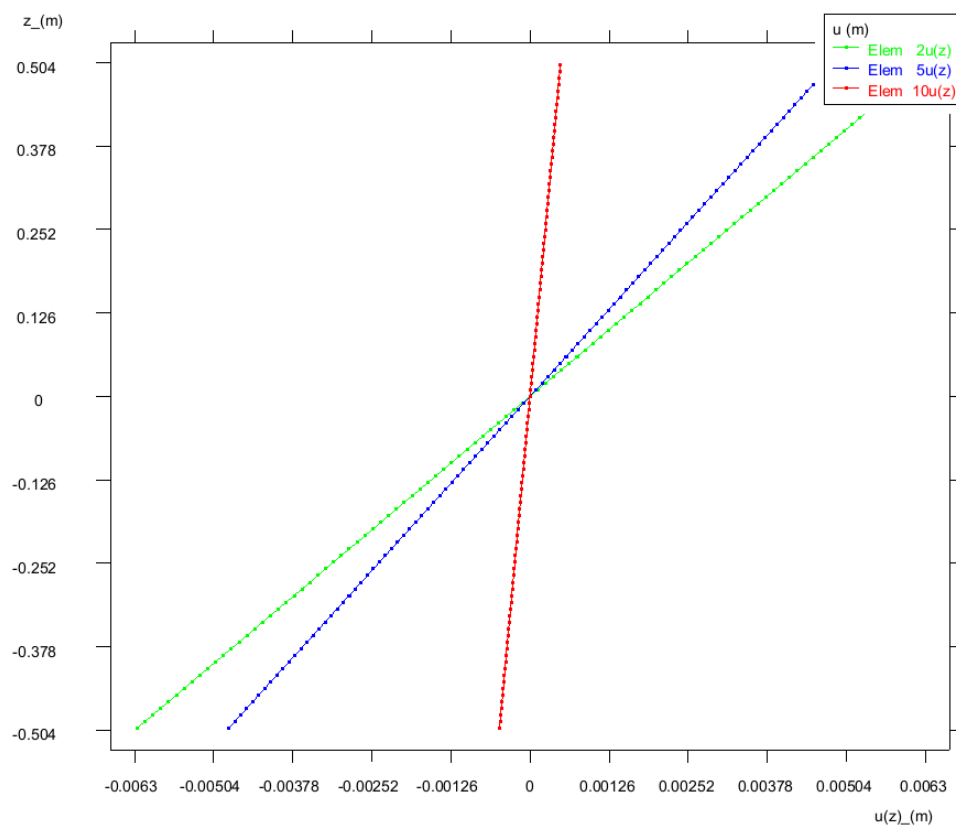
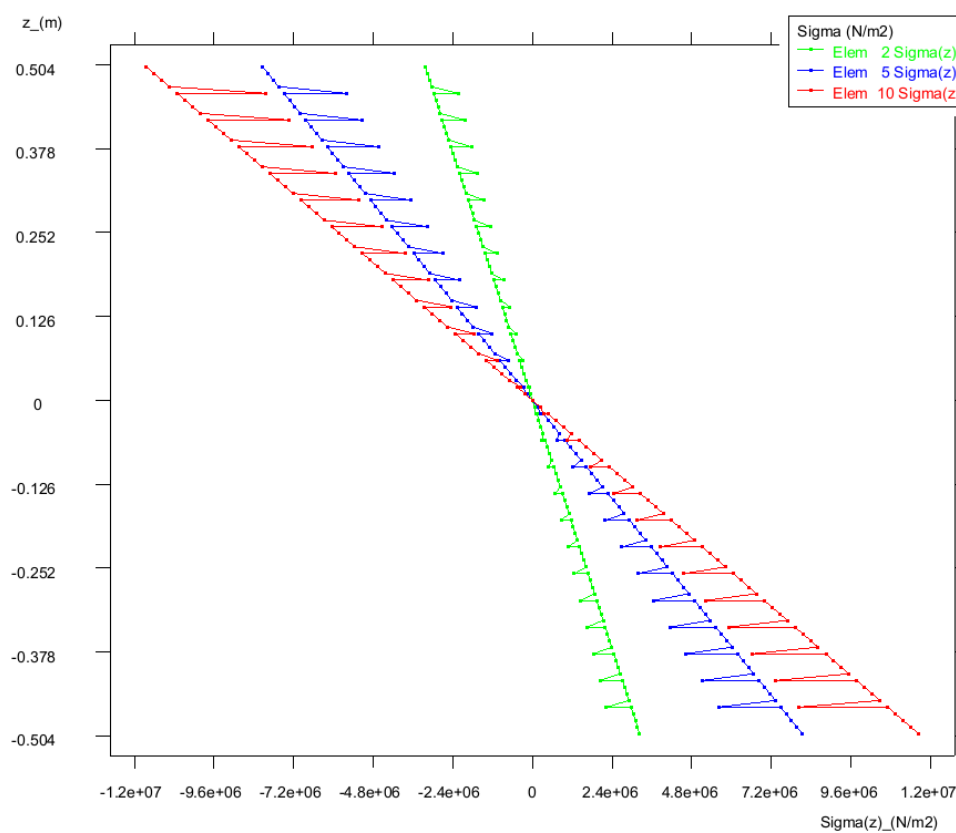


Figura 4.10 Solicitación de cortante

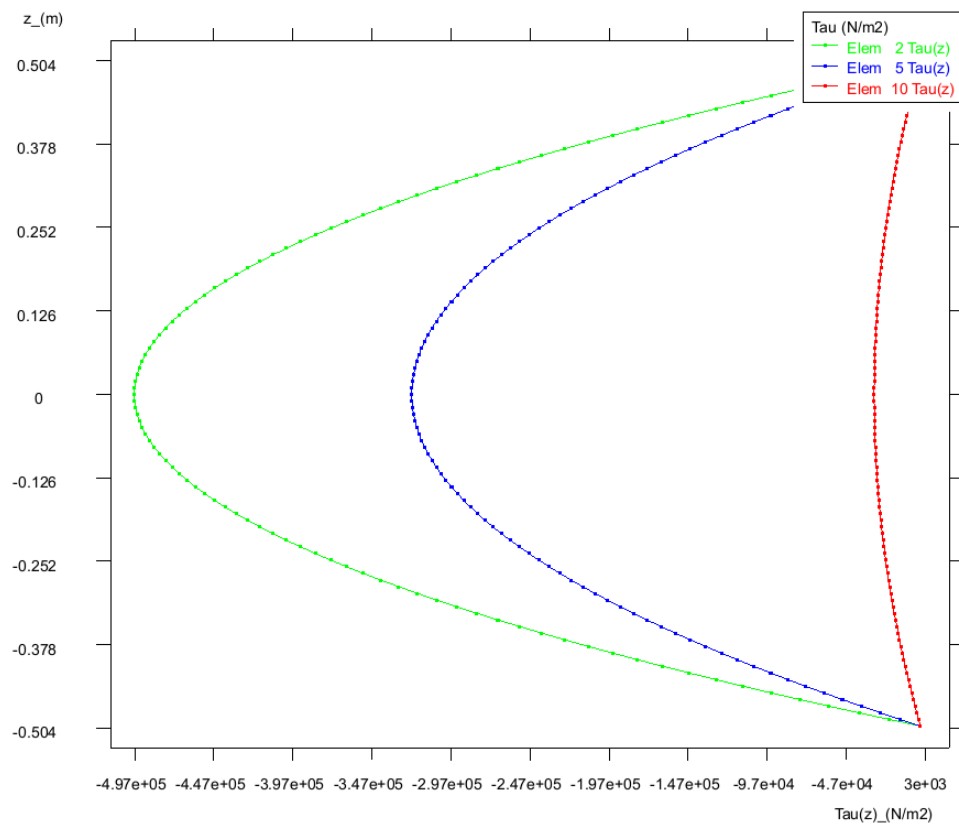
Por otro lado, y con intención de analizar las tensiones y desplazamientos que sufre la viga en su sección transversal, se le ha ordenado al programa que realice unas secciones para que se reflejen dichos resultados. Las secciones se han realizado en el elemento nº2, en el elemento nº5 y en el elemento nº10 y los resultados del desplazamiento axial (u), de la tensión axial (σ) y de la tensión tangencial (τ) son los que se visualizan en la Grafica 4.1, Grafica 4.2 y Grafica 4.3 respectivamente. Se han querido incluir en cada grafica los resultados de las mismas variables obtenidas en cada sección para visualizar el cambio de estos a lo largo de la longitud de la viga. Aparecen en verde los resultados en el elemento 2, en azul los resultados en el elemento 5 y en rojo los resultados en el elemento 10.



Grafica 4.1 Desplazamientos axiales



Grafica 4.2 Tensiones axiales



Grafica 4.3 Tensiones tangenciales

CONCLUSIONES

La primera conclusión visible si analizamos la Figura 4.8 es que la viga dimensionada tiene una flecha máxima en $x=L/2=10$ m de 0.0835m y por lo tanto no se consideraría lo suficientemente rígida para cumplir los requisitos de servicio. El elemento no se vería verificado ante la normativa estructural.

Por otro lado, se aprecia que las graficas de desplazamiento axial (u), tensión axial (sigma) y tensión tangencial (tau) reflejan adecuadamente el comportamiento de la viga a lo largo de su longitud. En la Grafica 4.2 (sobre tensión axial) se ve la distribución en zig-zag de esta a lo largo del canto de la viga, efecto que se produce por la diferencia de modulo de elasticidad longitudinal (E) entre las capas de madera aserrada y la capa de adhesivo MUF.

No entraremos muy al detalle en la comprobación de la Resistencia Ultima del elemento ni de su sección transversal ya que se ha modelado el problema en un Estado Limite de Servicio y por tanto no podríamos llegar a la conclusión de si el cálculo se vería verificado y aceptado por la normativa. A pesar de lo mencionado, se realizara una comparación de los valores característicos para analizar en que porcentaje difieren la resistencia del elemento (otorgada por el catalogo del fabricante) y las tensiones a la que se ve sometida la sección transversal.

En el catalogo se dice, ver Tabla 4.1, que la resistencia media a flexión de una viga de M.L.E compuesta del material GL28h es de 28 N/mm^2 . En contraposición, la viga está sufriendo una tensión axial máxima en su fibra más alejada de $1,2\text{e}7 \text{ N/m}^2$. El cociente entre ellas es:

$$\frac{12\text{N} / \text{mm}^2}{28\text{N} / \text{mm}^2} = 0,43$$

Por tanto, se puede decir que probablemente dicha viga no verifique un Estado Limite de Último, teniendo en cuenta que la resistencia se vería minorada y las acciones se verían mayoradas por seguridad estructural.

4.2.1 EJEMPLO N°1 REDIMENSIONADO A UNA VIGA CON CANTO DE 1,2 M

Como se ha podido apreciar en los resultados obtenidos líneas arriba, la viga calculada no cumple los requisitos de flecha exigidos por la norma. Se llega a la conclusión de que esto se produce porque la viga no es suficientemente rígida. Por lo tanto y con el objetivo de dotar al elemento de mayor rigidez se ha aumentado su canto en 0,2m, para aumentar la inercia seccional, ya que la longitud del elemento ($L=20$ m) debe mantenerse y el modulo de elasticidad también.

A partir de aquí se han introducido, en el pre-procesador, los nuevos datos que constituyen el problema. Se ha aumentado el peso propio del elemento y se han añadido las capas de material adicional que lo van a formar. Como se disponen capas de 0,04m de espesor se han añadido 5 capas de madera de Clase Resistente C30 junto con la respectivas interfaces de adhesivo MUF.

Se le ha asignado la carga correspondiente que en este caso es de 7984 N/m. En la Figura 4.11 y Figura 4.12 se puede observar los cambios realizados.



Figura 4.11 Cargas actuantes

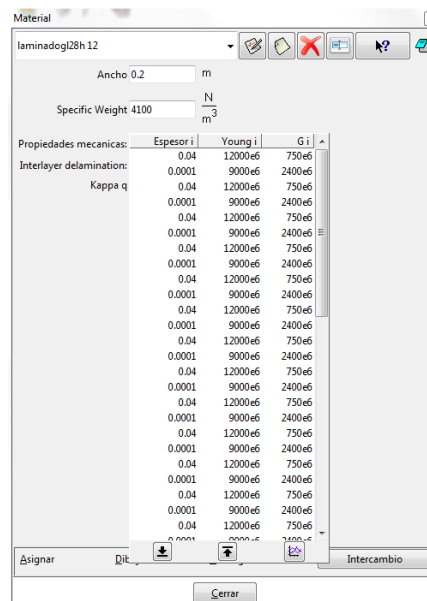


Figura 4.12 *Propiedades*

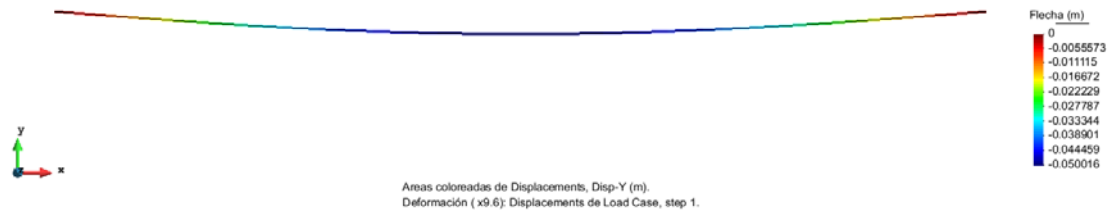
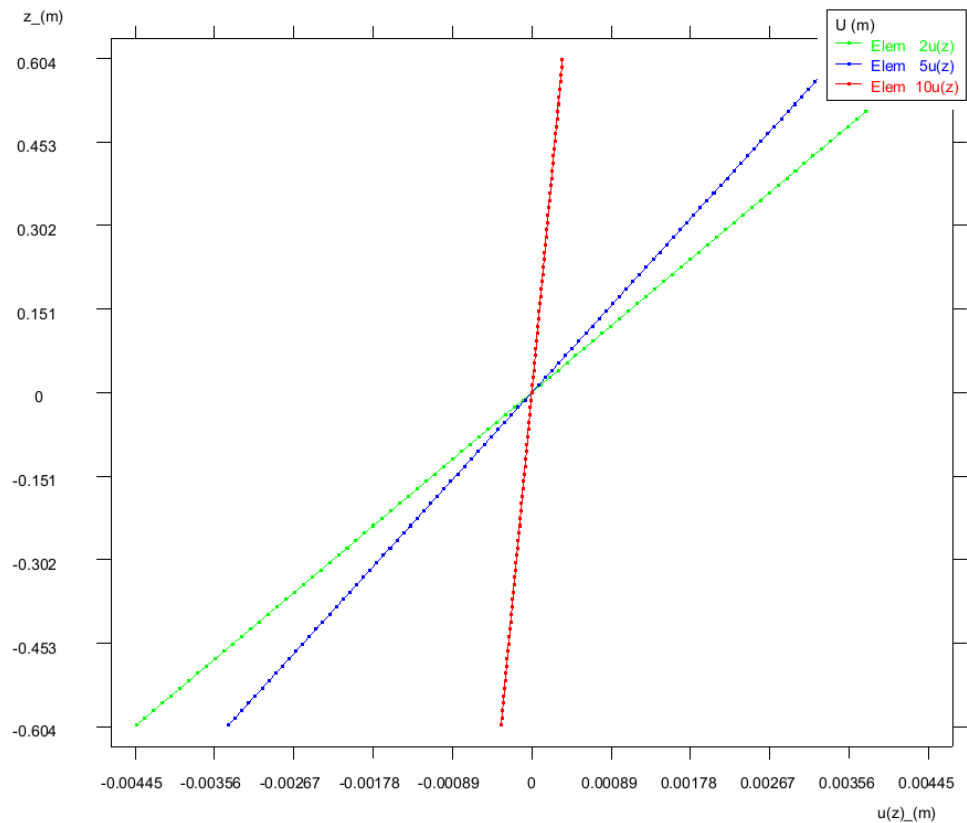


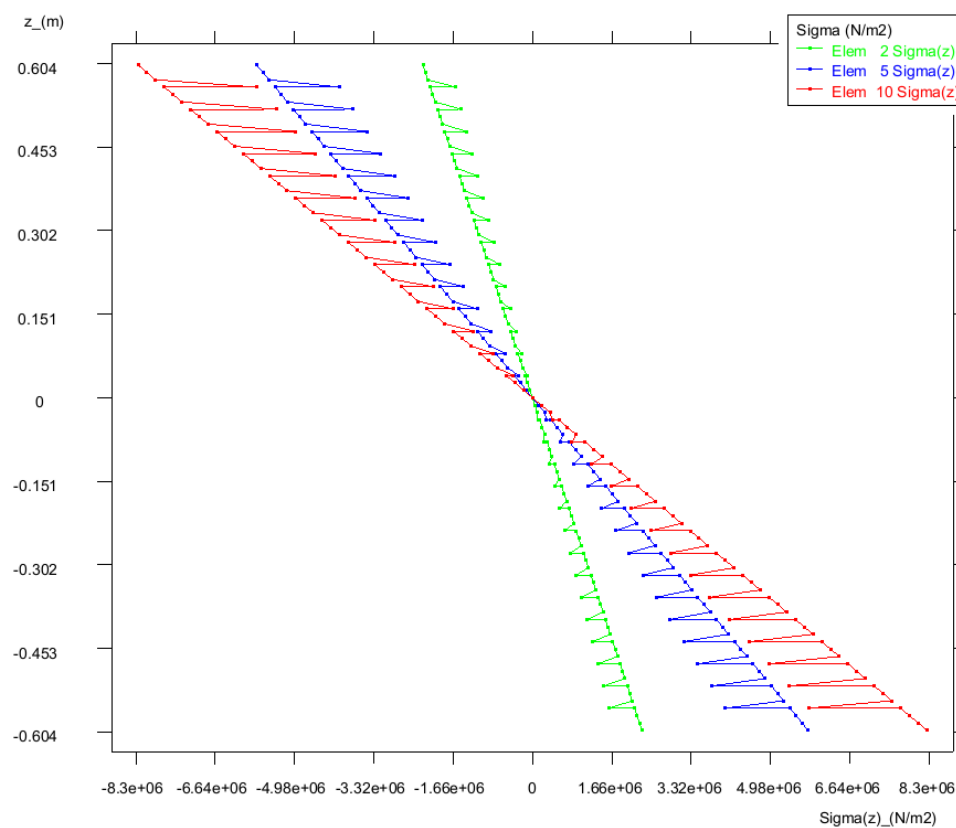
Figura 4.13 Deformada y flecha

En la Figura 4.13 se puede apreciar la flecha y la deformada a lo largo de x del nuevo elemento de 1,2m de canto. La flecha máxima, en $x=L/2$, de la viga es de 5cm por lo que en esta ocasión sí que verificaría el Estado Limite de Flechas de la normativa.

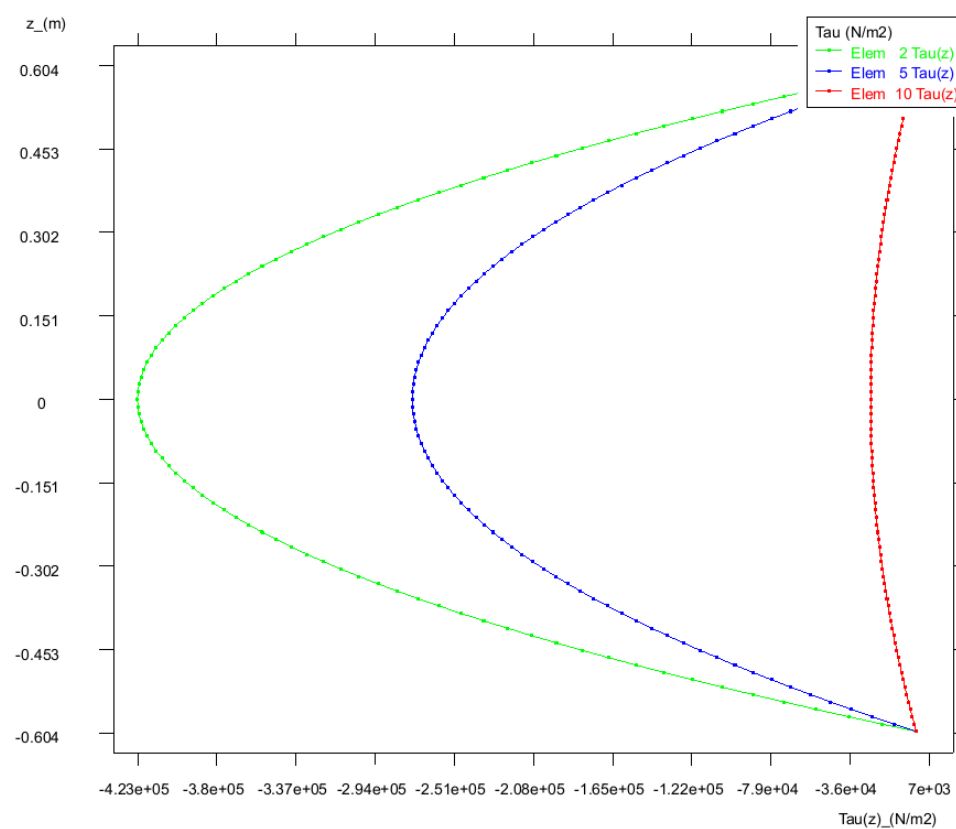
En las Grafica 4.4, Grafica 4.5 y Grafica 4.6 se aprecian de nuevo las graficas de desplazamientos axiales (u), de tensiones axiales (Σ) y de tensiones tangenciales (τ) a lo largo del canto de la viga. Del mismo modo que antes se han analizado estas variables en el elemento nº2, nº5 y nº10.



Grafica 4.4 Desplazamientos axiales



Grafica 4.5 Tensiones axiales



Grafica 4.6 Tensiones tangenciales

CONCLUSIONES

Como se aprecia en las graficas ha habido cambios sustanciales en comparación con la viga de 1m de canto. Gracias al aumento de rigidez es visible que el desplazamiento axial (u) a lo largo de x se ve reducido del orden de 1,85mm.

En cuanto a la distribución, a lo largo del canto, de la tensión axial (σ), se aprecia que la tensión axial máxima (σ_{max}) ha disminuido respecto a la viga de 1m de canto gracias al aumento de rigidez, a pesar que el aumento de 0,2m del canto produce una mayor acción de peso propio. Si observamos la Grafica 4.5 (sobre tensiones axiales) y la comparamos con el resultado obtenido para la viga de 1m de canto se aprecia una disminución de la tensión axial de 3,7 N/mm². Por lo tanto si alguna de ambas vigas tiene posibilidades de verificar el Estado Limite Ultimo será aquella con más inercia, es decir la de 1,2m de canto.

Por último decir, que aunque en menor medida, la tensión tangencial máxima (τ_{max}) también se ha reducido con respecto a la viga de 1m de canto como se puede apreciar en la Grafica 4.6.

4.3 EJEMPLO N°2: VIGA DE M.L.E. DE CLASE RESISTENTE GL28C BIAPOYADA CON CARGA UNIFORME

El segundo ejemplo numérico constituye una viga de M.L.E. de Clase Resistente GL28c biapoyada con carga uniforme. Esta clase resistente corresponde a una viga que está compuesta, en toda su sección transversal, de láminas heterogéneas de madera aserrada. Las láminas exteriores (más alejadas de la línea neutra) son de madera aserrada de clase resistente C30 (láminas de mayor resistencia en la sección) mientras que las demás láminas que quedan en el núcleo son de madera aserrada de Clase Resistente C24. Todas las láminas tienen un espesor de 4cm y una anchura de 20cm; por lo tanto la viga de 1m de canto está compuesta de 25 láminas como en el Ejemplo N°1. El material adhesivo que une las láminas es una cola de Melamina Urea Formaldehído (MUF) de 0,1mm de espesor. Las características de los materiales mencionados se pueden observar en la Tabla 4.4. Según la norma las láminas que se disponga en las fibras exteriores, en este caso formadas de madera aserrada de C.R. C30 deberán de ser de al menos 1/6 de canto en cada extremo, y nunca disponiéndose menos de 2 láminas. En este caso se han dispuesto 5 láminas en cada extremo del canto de C.R. C30 y 15 láminas en el núcleo de C.R. C24 (ver Figura 4.15).

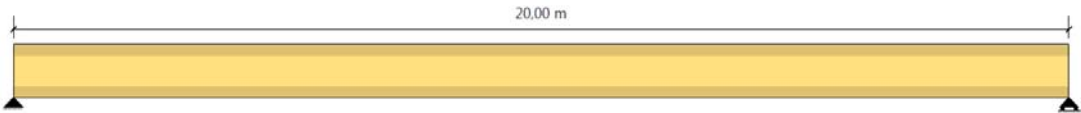


Figura 4.14 Tipología estructural

M.L.E. DE CLASE RESISTENTE GL28c

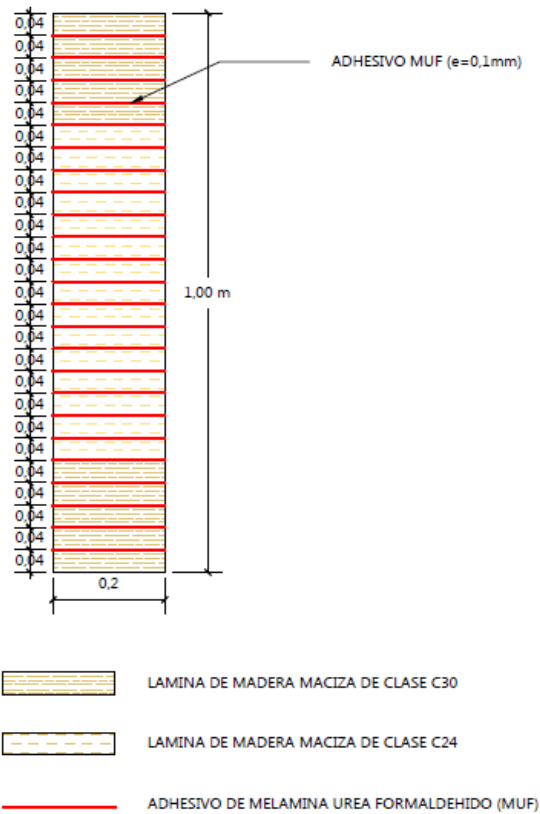


Figura 4.15 Sección transversal GL28c

Propiedades de los Materiales		
	E (N/mm2)	G (N/mm2)
C.R. C30	12000	750
C.R. C24	11000	690
MUF	9000	2400

Tabla 4.4 Propiedades de los materiales

Pre-proceso

Se ha comenzado por cargar el tipo de problema a analizar (VIGAS LAMINADAS_Ramseires Educacional 2D) y se ha seguido introduciendo los datos en el pre-procesador GiD. En las Figura 4.16, Figura 4.17 y Figura 4.18 se observa como se ha realizado la introducción de las condiciones de contorno, las acciones y las propiedades de los materiales. Como se ha pasado a un material con una densidad menor, de 380kg/m^3 , las acciones se ven reducidas en comparación con el Ejemplo N°1. La carga lineal uniforme que le corresponde a este ejemplo es de 7760kN/m .

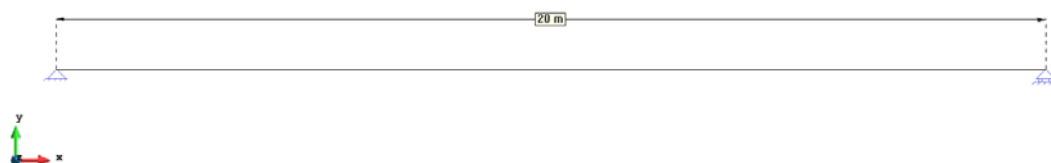


Figura 4.16 Geometría



Figura 4.17 Cargas actuantes

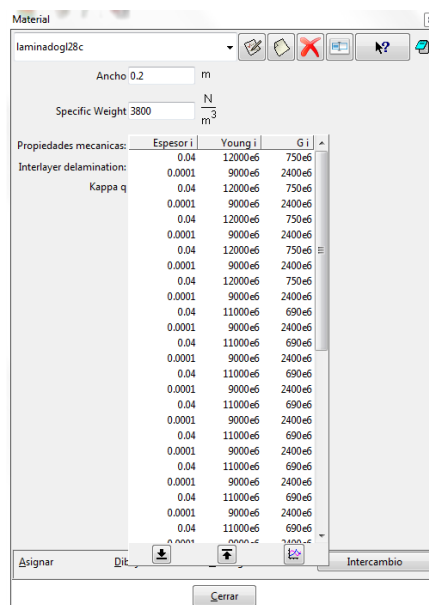


Figura 4.18 Propiedades

Para finalizar se ha mallado el modelo con elementos de dos nodos EEBZ2 de 1 metro de longitud. Se ha creado la malla EEBZ2-20 de 20 elementos y 21 nodos que se puede observar en la Figura 4.19.



Figura 4.19 Malla

Proceso

Se ha procedido al cálculo mediante el modulo de VIGAS LAMINADAS del Ramseries Educativo_2D. Se han obtenido los resultados visibles en el posterior apartado.

Post-proceso

En la Figura 4.20 se observan la deformada y la flecha (desplazamiento en el eje y) a lo largo de la longitud de la viga.

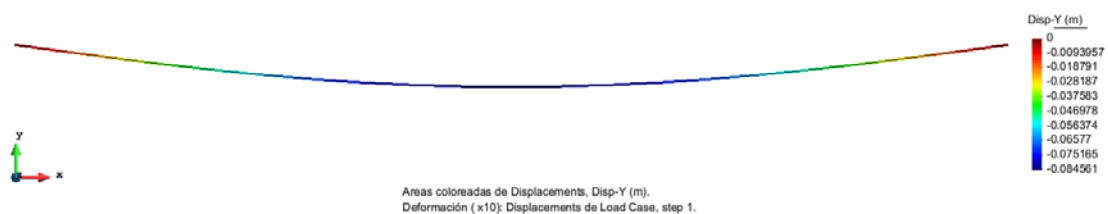


Figura 4.20 Deformada y flecha

La Figura 4.21 y Figura 4.22 muestran las solicitaciones de flexión y de cortante que sufre la viga.

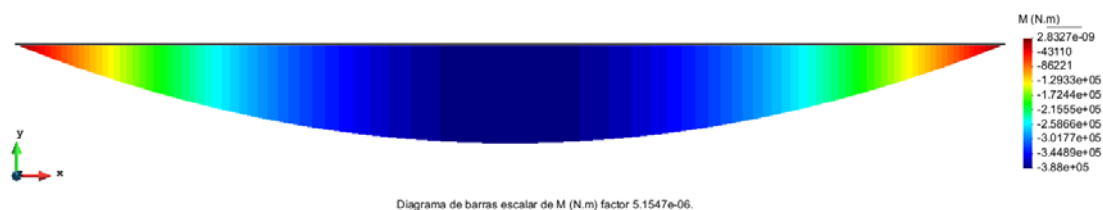


Figura 4.21 Solicitaciones de flexión

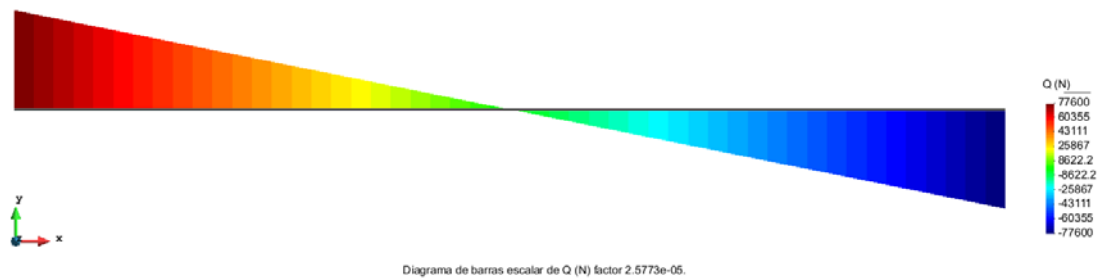
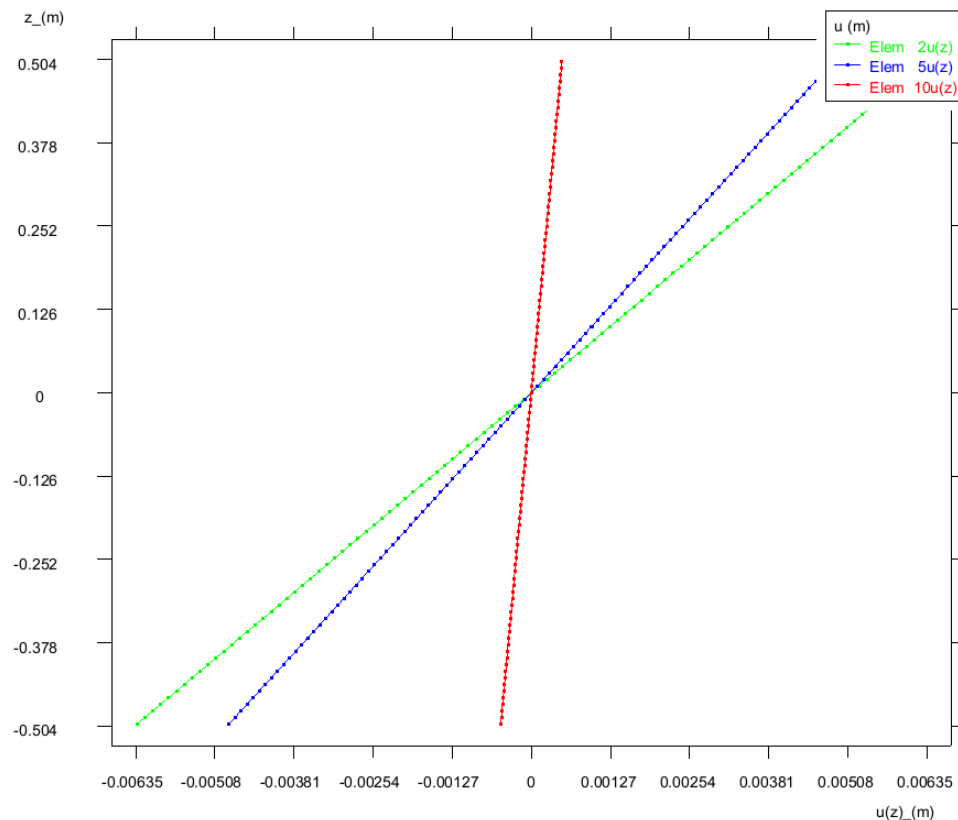
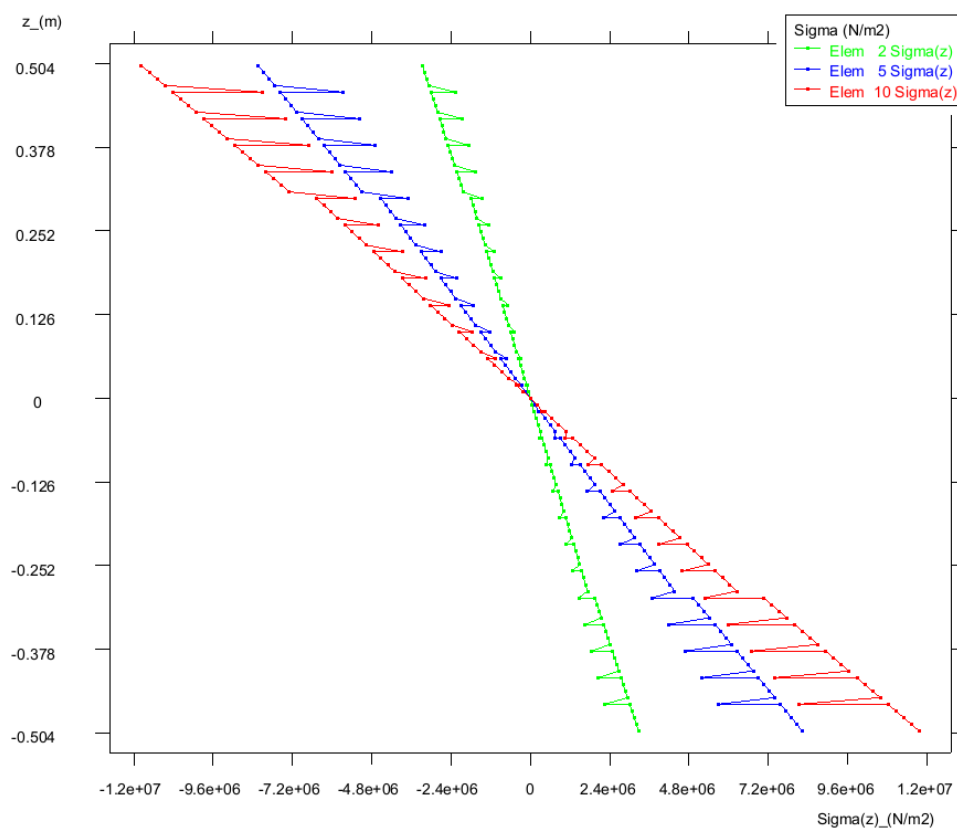


Figura 4.22 Solicitaciones de cortante

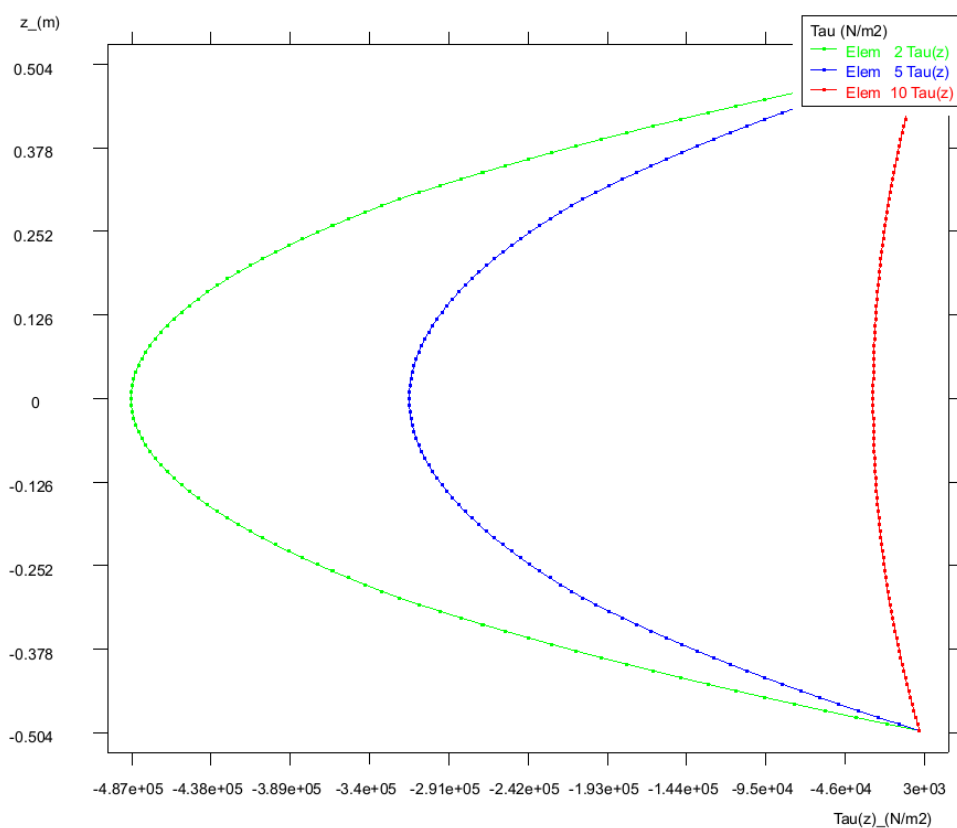
Del mismo modo que en el *Ejemplo N°1* se analizaran las tensiones y los desplazamientos que sufre la viga en la sección transversal. Con intención de realizar la comparación respecto a los resultados obtenidos para la viga M.L.E. de C.R. *GL28h*, del *Ejemplo N°1*, se han realizado las secciones en el elemento n°2, en el elemento n°5 y en el elemento n°10. Los resultados del desplazamiento axial (u), de la tensión axial (σ) y de la tensión tangencial (τ) son los que se visualizan respectivamente en las Grafica 4.7, Grafica 4.8 y Grafica 4.9. Se han querido incluir en cada grafica los resultados de las mismas variables obtenidas en cada sección para visualizar el cambio a lo largo de la longitud de la viga. Aparecen en verde los resultados de la sección en el elemento 2, en azul los resultados del elemento 5 y en rojo los resultados del elemento 10.



Grafica 4.7 Desplazamientos axiales



Grafica 4.8 Tensiones axiales



Grafica 4.9 Tensiones tangenciales

CONCLUSIONES

Del mismo modo que en el *Ejemplo N°1*, la primera conclusión visible en la Figura 4.20 (sobre la flecha) es que la viga dimensionada tiene una flecha máxima en $x=L/2=10$ m de 0.0845m y por lo tanto no se consideraría lo suficientemente rígida para cumplir los requisitos de servicio. El elemento no se vería verificado ante la normativa estructural. Entre el *Ejemplo N°1*, donde se emplea una C.R. GL28h, y el *Ejemplo N°2*, donde se emplea una C.R. GL28c, existe una diferencia de flecha de 1 mm mayor en el *Ejemplo N°2*.

Por otro lado, se aprecia que las graficas de desplazamiento axial (u), tensión axial (σ) y tensión tangencial (τ) reflejan adecuadamente el comportamiento de la viga a lo largo de su longitud. En la Grafica 4.8 (sobre tensión axial), a diferencia del *Ejemplo N°1*, además de la distribución en zig-zag de la tensión axial a lo largo del canto de la viga a causa de la diferencia de propiedades entre la madera y el adhesivo MUF, es apreciable el salto zig-zag que se ocasiona entre las capas de madera aserrada de C.R.30 y C.R.24, efecto que se produce por la diferencia en el modulo de elasticidad entre las capas de madera aserrada.

En cuanto al valor de tensión máxima obtenida, se puede decir que ha habido mínimos cambios y que son apreciables en la Figura 4.21 (sobre la sollicitación de flexión). En esta se puede ver como el momento se ha reducido en 0.03 N.m a favor de la viga compuesta de la C.R. GL28c gracias a que esta transfiere una carga de peso propio algo más pequeña.

El desplazamiento axial no sufre cambios relevantes en el *Ejemplo N°2* con respecto al *Ejemplo N°1* y la tensión tangencial máxima (τ_{max}), ocasionada en el elemento n°2, disminuye en 0.1N/mm^2 entre ambos ejemplos siendo inferior en el *Ejemplo N°2*.

Entre el *Ejemplo N°1* y *N°2* el modulo elástico longitudinal medio a descendido, en el *Ejemplo N°2*, ya que se ha utilizado un material con menor modulo de elasticidad longitudinal. Esta es la principal causa por la que la flecha a aumentado, aunque lo hay hecho en un porcentaje pequeño. La ventaja más destacable del material compuesto es que se reduce el peso propio y que se puede llegar a abaratar el elemento ya que se utiliza en un porcentaje alto un material con menor resistencia.

4.3.1 EJEMPLO N°2 REDIMENSIONADO A UNA VIGA CON CANTO DE 1,2 M

Como se ha podido apreciar en los resultados obtenidos líneas arriba, de similar forma al *Ejemplo N°1*, la viga calculada no cumple los requisitos de flecha exigidos por la norma y por tanto se procede a rigidizar la viga aumentando el canto en 0,2m.

Idénticamente al *Ejemplo N°1* se han introducido, en el pre-procesador, los nuevos datos que constituyen el problema. Se ha aumentado el peso propio del elemento y se han añadido las capas de material adicional que lo van a formar. Como se disponen capas de 0,04m de espesor se han añadido 5 láminas de madera aserrada con la respectivas interfaces de adhesivo MUF. Por lo tanto la nueva viga de 1,2m de canto compuesta de la C.R. GL28c está formada de 30 láminas de madera aserrada heterogéneas. La integran 5 láminas en cada extremo (extremos alejados de la línea neutra) de madera aserrada de C.R. C30 y 20 láminas de madera aserrada de C.R. C24 en su núcleo.

Se le ha asignado la carga correspondiente que en este caso es de 7912 N/m. En las Figura 4.23 y Figura 4.24 se puede observar los cambios realizados.

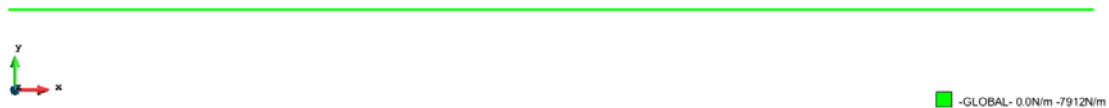


Figura 4.23 Cargas actuantes

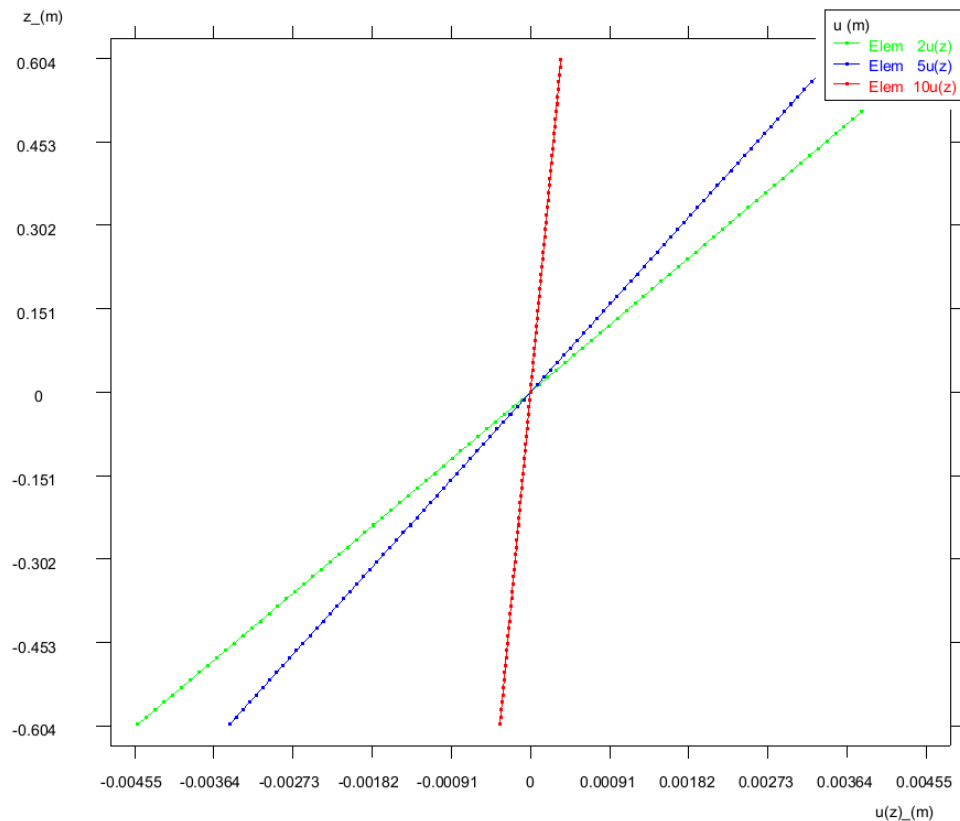
Figura 4.24 Propiedades



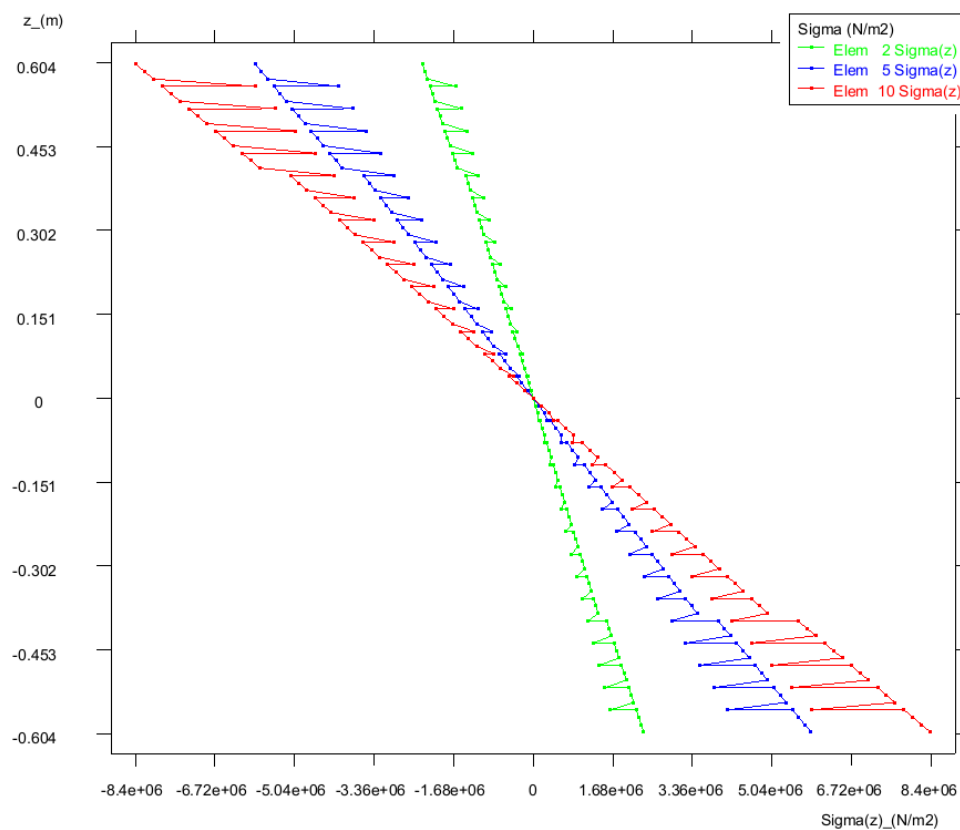
Figura 4.25 Deformada y flecha

En la Figura 4.25 se puede apreciar la flecha a lo largo de x del nuevo elemento de 1,2m de canto. La flecha máxima, en $x=L/2$, de dicho elemento es de 5cm por lo que en esta ocasión sí que la viga verificaría el Estado Limite de Flechas de la normativa. En comparación con la viga de 1,2m de canto del Ejemplo N°1 la flecha es de 1mm mayor debido a que el elemento es algo menos rígido.

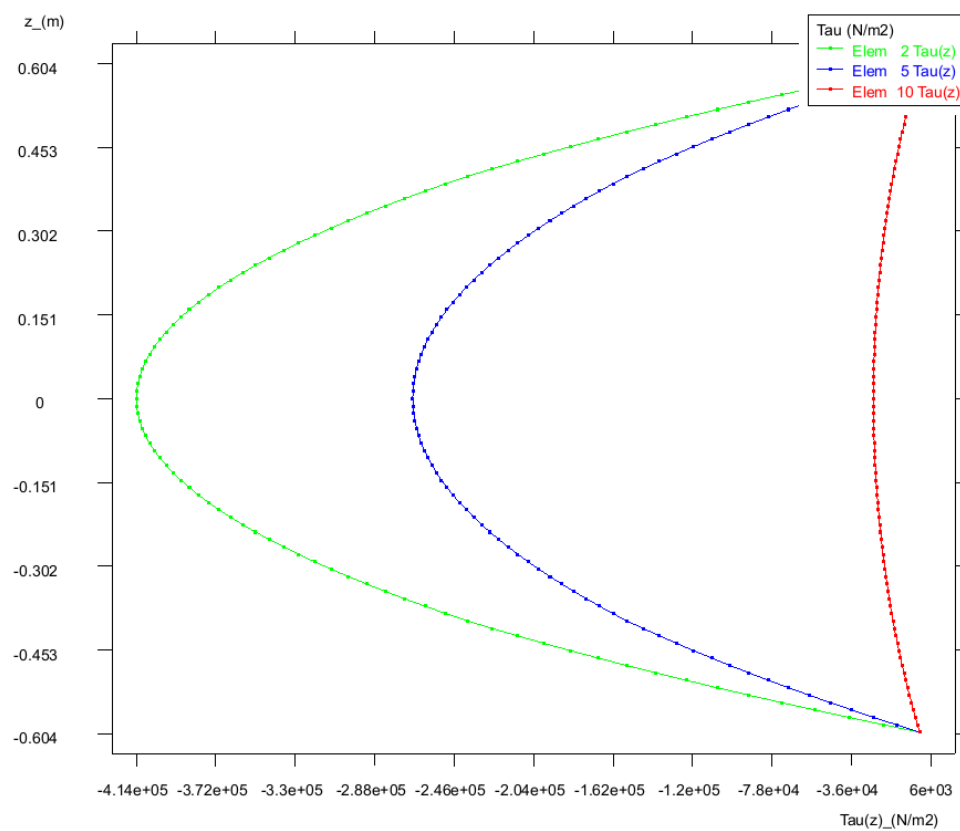
En las Grafica 4.10, Grafica 4.11 y Grafica 4.12 se aprecian de nuevo los desplazamientos axiales (u), de tensiones axiales (Σ) y de tensiones tangenciales (τ) a lo largo del canto de la viga. Del mismo modo que antes se han analizado estas variables en el elemento n°2, n°5 y n°10.



Grafica 4.10 Desplazamientos axiales



Grafica 4.11 Tensiones axiales



Grafica 4.12 Tensiones tangenciales

CONCLUSIONES

Como se aprecia en las graficas, ha habido cambios sustanciales de forma y magnitud de modo similar a como ocurría en el *Ejemplo N°1* en comparación con la viga de 1m de canto. Hay que apuntar que la diferencia de los valores es similar en magnitud habiéndose reducido el desplazamiento axial máximo (u_{max}) del orden de 1,8mm en este Ejemplo.

En cuanto a la distribución, a lo largo del canto, de la tensión axial (σ), se aprecia que la tensión axial máxima (σ_{max}) ha disminuido respecto a la viga de 1m de canto pero en esta ocasión lo ha hecho en $0,1\text{N/mm}^2$ menos que en el *Ejemplo N°1* obteniendo una diferencia en la tensión axial máxima (σ_{max}) de 3.6N/mm^2 menos (ver Grafica 4.11). Concluyendo como en el *Ejemplo N°1*, si alguna de ambas vigas tiene posibilidades de verificar el Estado Limite Ultimo será aquella con más inercia, es decir la de 1,2m de canto.

Se aprecia claramente, como existe una concentración mayor de tensión en las láminas externas debida a la diferencia de los módulos de elasticidad entre ambas Clases Resistentes de madera aserrada. Del mismo modo se puede apreciar la distribución zig-zag.

Por último decir, que aunque en menor medida, la tensión tangencial máxima (τ_{max}) también se ha reducido con respecto a la viga de 1m de canto como se puede apreciar en la Grafica 4.12.

4.4 MODELADO DE LA DELAMINACIÓN: VIGA DE M.L.E BIAPOYADA CON CARGA UNIFORME

En el presente apartado se pretende realizar un modelado de la delaminación valiéndonos de las conclusiones que hemos obtenido en el apartado anterior.

Después de analizar los resultados obtenidos en los *Ejemplos N°1 y N°2* de los apartados anteriores, es apreciable que el dimensionamiento de partida de las vigas de sección transversal de 1m x 0,2m no es suficiente para verificar la flecha sobre una luz de 20m de largo. Teniendo en cuenta que las vigas (las del *ejemplo N°1* y las del *N°2*) de 1,2m de canto verifican el E.L.Flechas de la Normativa y que son también candidatas a verificar el E.L.U., este apartado se centrará en modelar la delaminación de los elementos de 1,2m de canto, ya que se considera que las vigas de 1m de canto no se dispondrían como solución real del presente problema.

Se analizarán los resultados obtenidos comparándolos por un lado con los resultados de los ejemplos sin delaminar, y por otro haciendo una comparación entre los resultados del material GL28h y del material GL28c.

La delaminación se ha modelado mediante la introducción adicional de una función Zig-Zag correspondiente a la cinemática de una capa de delaminación de espesor cero

que se dispondrá entre las láminas de madera y la capa de adhesivo MUF. El grado de delaminación se controla mediante el parámetro β_d , el cual puede tomar valores desde 0 (grado de delaminación nulo) hasta 1 (grado de delaminación máximo). En este apartado todos los ejemplos de delaminación se han realizado teniendo en cuenta que el grado de delaminación, o grado de degradación de la interfase entre lamina de madera y adhesivo, es medio y por tanto el valor $\beta_d=0,5$.

Para cada ejemplos se han modelado diferentes casos de delaminación y siempre teniendo en cuenta que esta se produce en toda la longitud de la viga. Los tres casos de delaminación que se han estudiado para cada Ejemplo son:

- Delaminación ocurrida en 1/5 inferior del elemento
- Delaminación ocurrida en la mitad del elemento
- Delaminación ocurrida en 1/5 superior del elemento

Pre-proceso

No se repetirán los pasos realizados en los ejemplos anteriores ya que son visibles en dicho apartado. En la Figura 4.26 se observa, como ejemplo, como se ha programado la el valor β_d en uno de los Ejemplos. El grado de delaminación β_d se introduce en el apartado de materiales indicando en cuál de las interfases ocurrirá.

Por lo tanto programaremos el parámetro β_d en cada ejemplo anterior, obteniendo tres nuevos ejemplos por cada uno de los anteriores. El parámetro β_d se ha dispuesto en las interfases 12 (1/5 inferior de la sección), 29 (mitad de la sección), y 46 (1/5 superior de la sección).

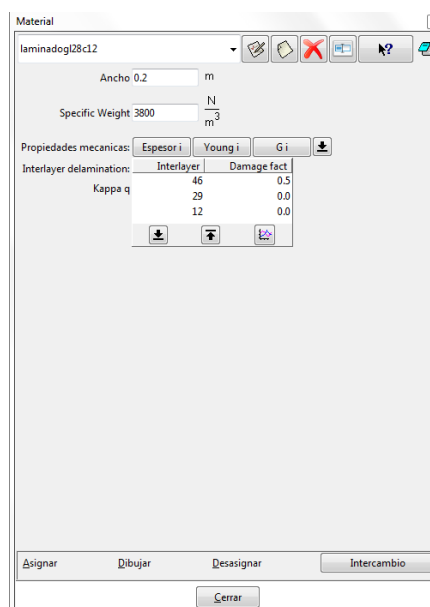


Figura 4.26 Propiedades

4.4.1 POST-PROCESO

Los primeros resultados obtenidos son los referentes a las flechas, para cada material y modo de delaminación. En la Tabla 4.5 se han recogido los datos referentes a las flechas con el objetivo de compararlos.

ANÁLISIS DE FLECHAS (w)						
MATERIAL VIGA		CANTO (m)	FLECHA (mm)	FLECHA-MODO DELAMINADO ($\beta_d=0,5$) (mm)		
				1/5 INF.	1/2	1/5 SUP.
HOMOGENEA (C.R. C30)	GL28h	1,2	50,016	55,967	61,213	56,937
COMPUESTA (C.R. C30/C24)	GL28c	1,2	50,959	57,377	62,586	58,347

Tabla 4.5 Análisis de flechas

Mientras que el crecimiento de flecha, en estado no delaminado, entre la viga compuesta de material *GL28h* y el material *GL28c* es de 1mm, el crecimiento de la flecha, para cada uno de los estados delaminados, entre ambos materiales es de alrededor de 1,4mm.

Las flechas menores, en los diferentes estados delaminados, si comparamos ambos materiales, son las que se ocasionan en el material homogéneo *GL28h*. Es lógico pensar que sea así ya que el material *GL28h* es algo más rígido que el material *GL28c*.

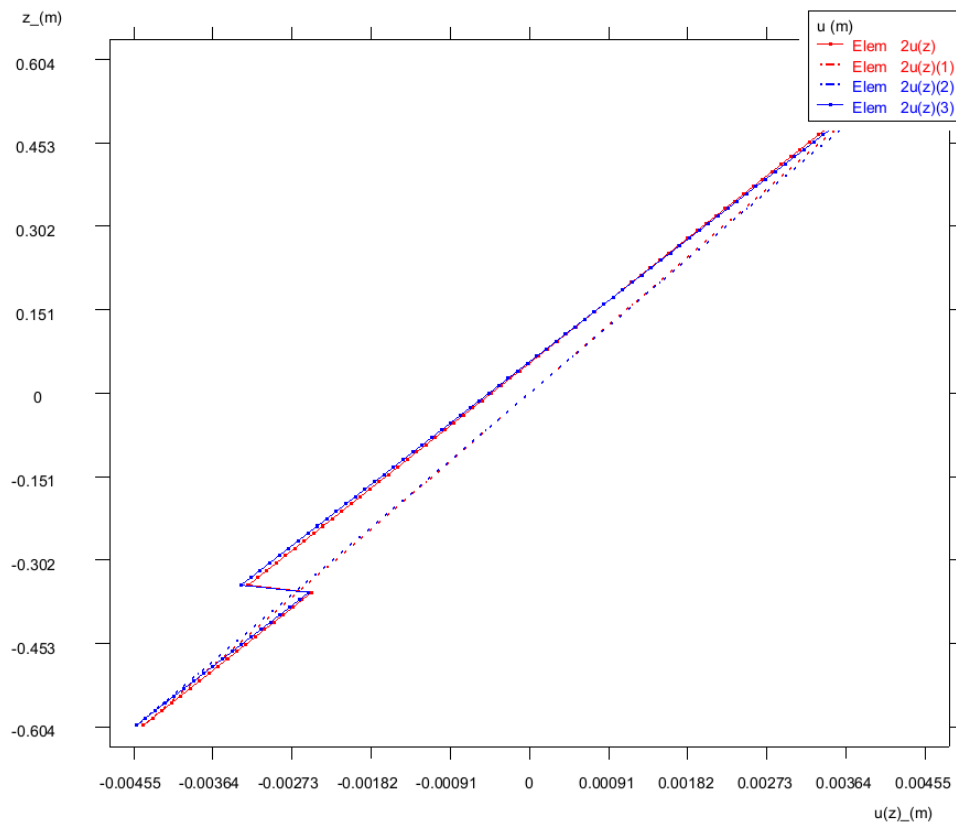
No obstante, hay que mencionar que el único modo delaminado que no verificaría la flecha exigida en la normativa sería aquel que produce el fallo en la mitad de la viga y para toda la longitud de esta. En el modo delaminado del 1/5 inferior y en el modo delaminado del 1/5 superior de la viga se verifican las flechas para un grado de delaminación de $\beta_d=0,5$. A pesar de ello, la viga de material homogéneo *GL28h* da unos valores menores que la viga de material compuesto *GL28c*. Del mismo modo es preciso apuntar que se dan flechas mayores cuando ocurre la delaminación en la parte superior, siendo la flecha mayor que verificaría la Normativa la ocurrida en una viga de material compuesto *GL28c* cuando se ha degradado el 1/5 superior de la sección.

Por otro lado se han obtenido los resultados referentes a los desplazamientos axiales (u), las tensiones axiales (Sigma) y las tensiones tangenciales (Tau) a lo largo del canto de la viga. Estos datos se han diferenciado para cada modo de delaminación.

En las gráficas de desplazamientos axiales (u) y tensiones tangenciales (Tau) se han introducido las gráficas de ambas vigas, *GL28h* y *GL28c*, delaminadas y no delaminadas para poder comparar los resultados. Las gráficas en rojo hacen referencia al material *GL28h* y las gráficas en azul hacen referencia al material *GL28c*. Las gráficas de puntos hacen referencia al material delaminado mientras que la gráfica de líneas discontinuas hacen referencia al material sin delaminar de los *Ejemplos N°1* y *N°2*.

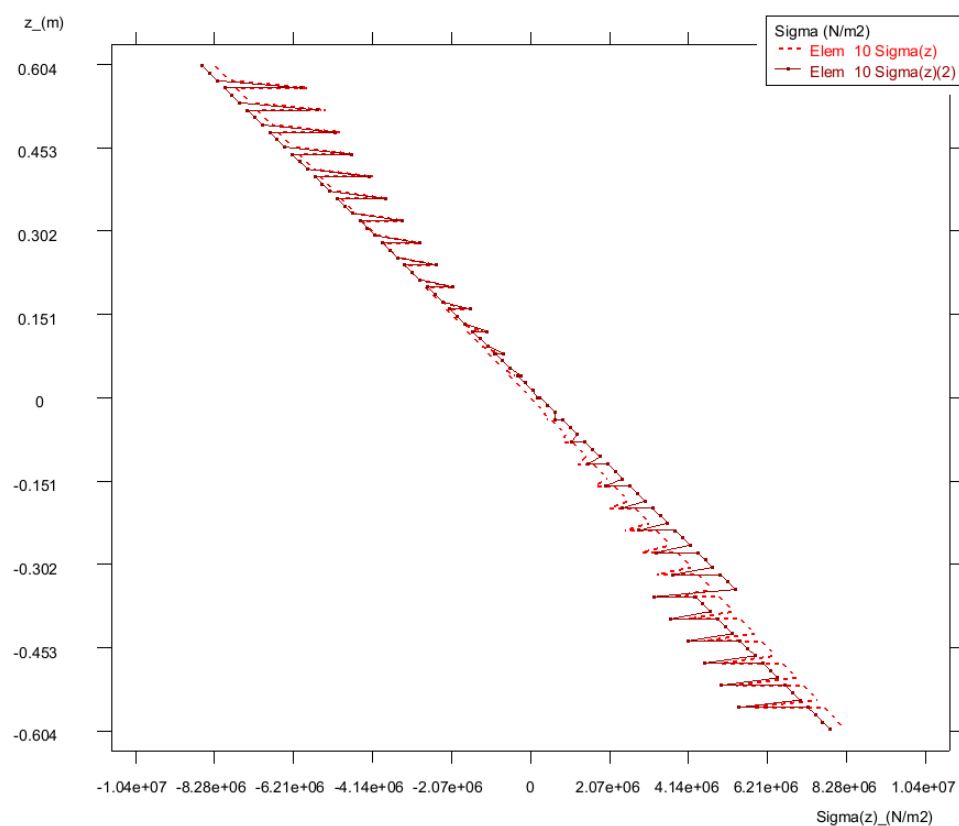
Las gráficas de tensiones axiales se han diferenciado para cada material.

DELAMINACION DE 1/5 INFERIOR DE LA VIGA (INTERFASE 12)

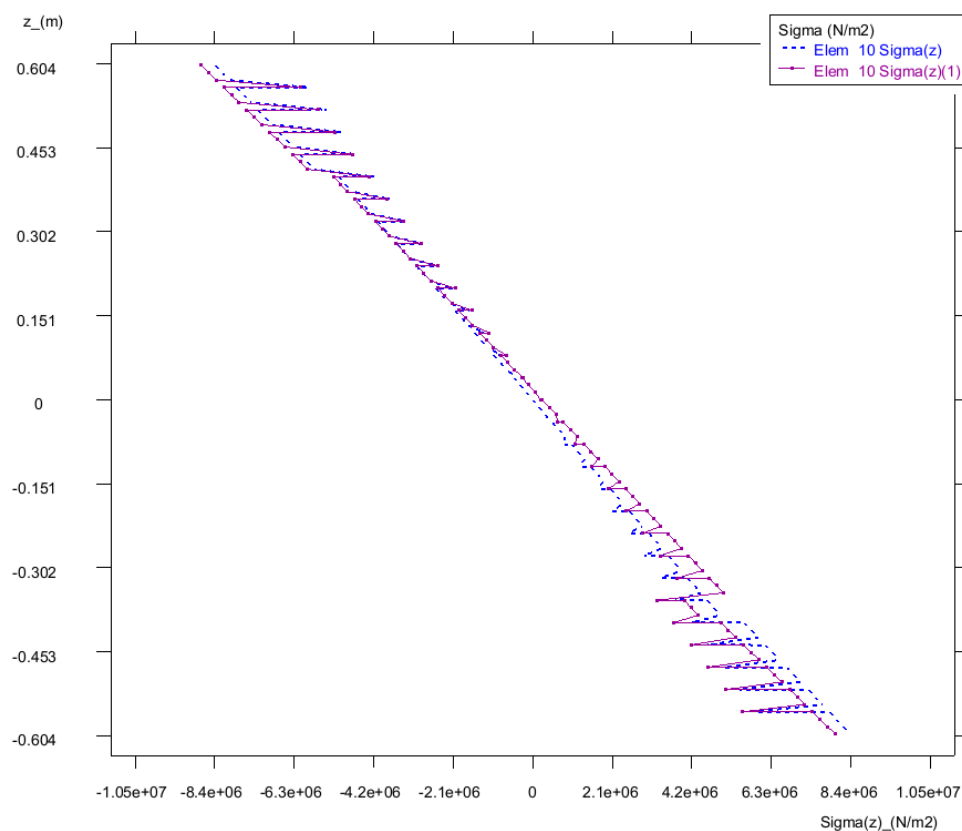


Grafica 4.13 Desplazamientos axiales de GL28h y GL28c. Delaminacion 1/5 inferior

En la Grafica 4.13 se aprecia claramente como el desplazamiento axial máximo (u_{\max}) no ha variado mucho entre la viga sin delaminar y la viga delaminada. No obstante se aprecia claramente el desplazamiento relativo que sufre el elemento en la interfase 12 a consecuencia de la pérdida de propiedades en esa interfase. Apuntar también que la viga compuesta con el material GL28c tiene un desplazamiento relativo algo mayor que la viga compuesta del material GL28h. El desplazamiento relativo lo ha sufrido en mayor medida la parte superior de la zona dañada.



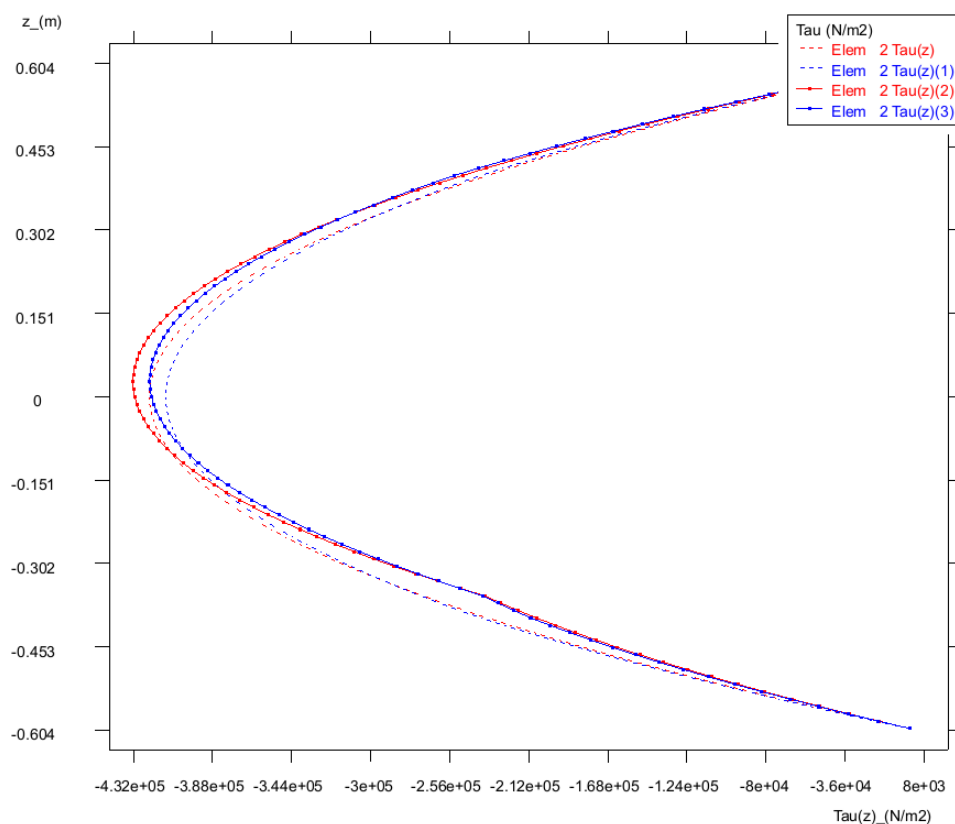
Gráfica 4.14 Tensiones axiales de GL28h. Delaminación 1/5 inferior



Gráfica 4.15 Tensiones axiales de GL28c. Delaminación 1/5 inferior

En la Grafica 4.14 se puede ver claramente como varían las tensiones axiales en el modo delaminado. Se aprecia claramente como hay un salto (variación) de tensiones en la zona afectada dando como resultado una disminución de tensiones en la parte inferior de la zona afectada y un aumento de tensiones en la parte superior de la zona afectada. Del mismo modo las tensiones axiales máximas (Sigma max.) han aumentado en la cara superior con un valor de $0,35 \text{ N/mm}^2$, mientras que la tensión ha disminuido en esa cuantía en la cara inferior de la sección.

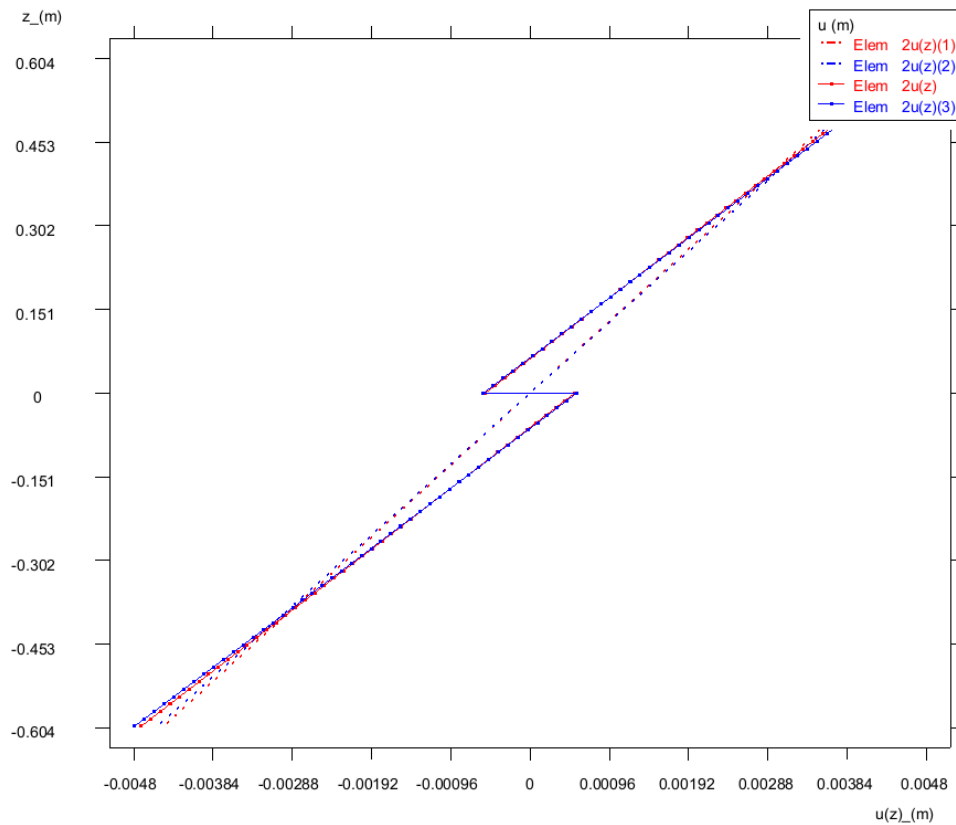
En el caso del material compuesto *GL28c*, cuyos resultados se recogen en la Grafica 4.15, ha ocurrido del mismo modo que en el material *GL28h*. Han aumentado en $0,35 \text{ N/mm}^2$ las tensiones axiales máximas en la cara superior de la sección respecto al modelo sin delaminar y han disminuido la misma cantidad en la cara inferior de la sección.



Grafica 4.16 Tensiones tangenciales de GL28h y GL28c. Delaminacion 1/5 inferior

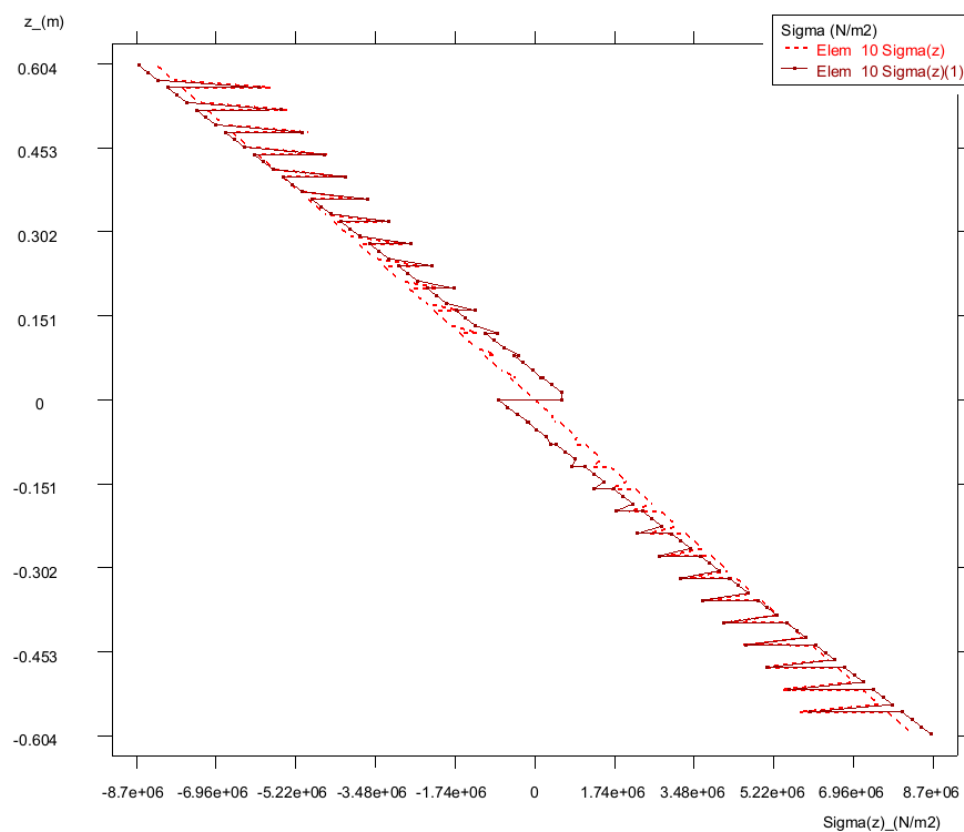
Por último en la Grafica 4.16 se pueden observar las tensiones tangenciales (Tau) de ambos materiales *GL28h* y *GL28c* sin producirse daño (*Ejemplo N°1* y *N°2*) y con daño en la interfase 12. Del mismo modo que en los ejemplos que no sufren daño el material *GL28h* da una tensión tangencial máxima (Tau max.) mayor que el material *GL28c*, y se ocasiona en el canto medio de la sección. Cuando la interfase 12 está dañada, se puede apreciar que se ocasiona una variación, aunque muy pequeña, en dicha interfase que hace variar las tensiones tangenciales máximas para ambos materiales en comparación con los ejemplos que no tienen daño. La variación de tensión tangencial máxima para ambos materiales es similar y es del alrededor de $0,009 \text{ N/mm}^2$ mayor.

DELAMINACION DE LA MITAD DE LA VIGA (INTERFASE 29)

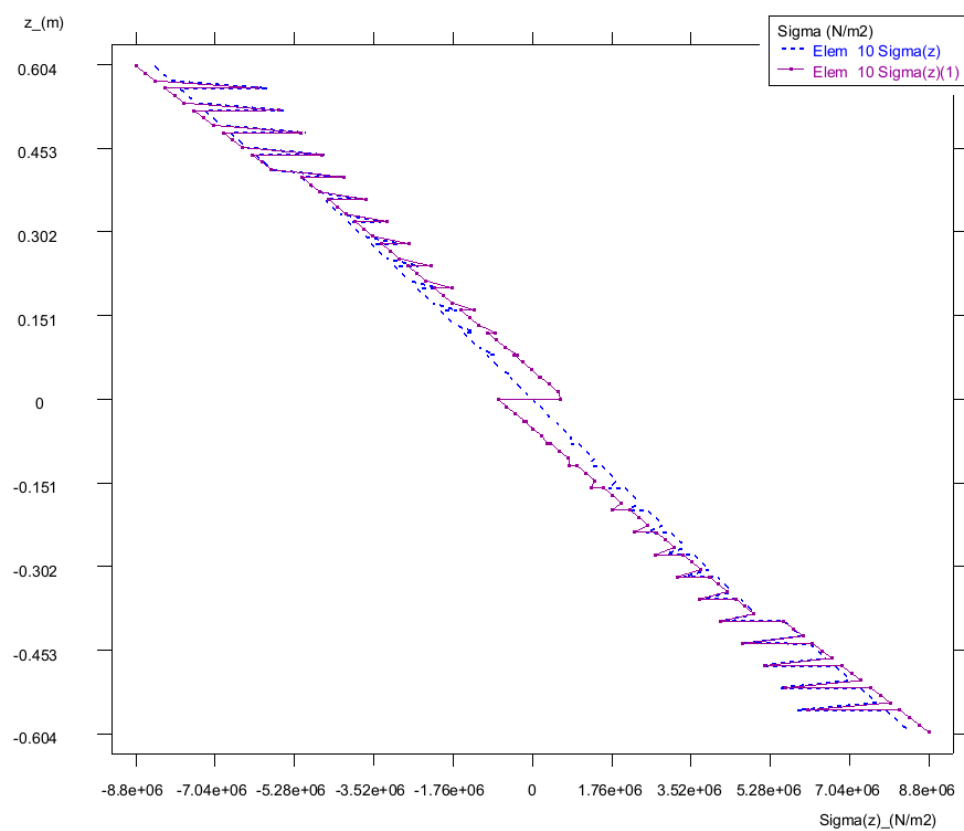


Grafica 4.17 Desplazamientos axiales de GL28h y GL28c. Delaminacion en la mitad

En la Grafica 4.17 se aprecia claramente como el desplazamiento axial máximo ($u_{\max.}$) ha variado 0.3mm de la viga delaminada a la no delaminada. En esta ocasión el desplazamiento relativo entre laminas ha sido algo mayor en comparación con el *Ejemplo Delaminado N°1* y se ha dado en la interfase 29 donde ha ocurrido el daño interlaminar. Del mismo modo al ejemplo anterior, la grafica azul que corresponde al material GL28c tiene un desplazamiento algo mayor al del material GL28h. En esta ocasión el aumento del desplazamiento axial en cara superior de la viga y en la cara inferior de la viga es similar ya que el daño se ha producido en la mitad de elemento.

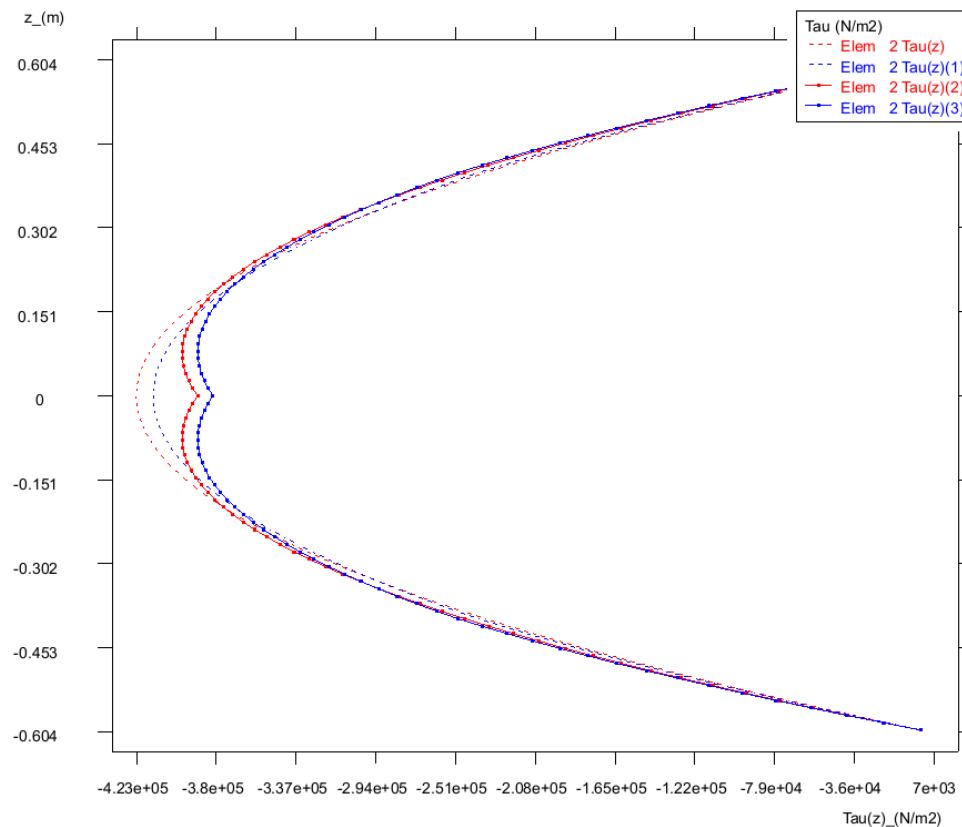


Gráfica 4.18 Tensiones axiales de GL28h. Delaminación en la mitad



Gráfica 4.19 Tensiones axiales de GL28c. Delaminación en la mitad

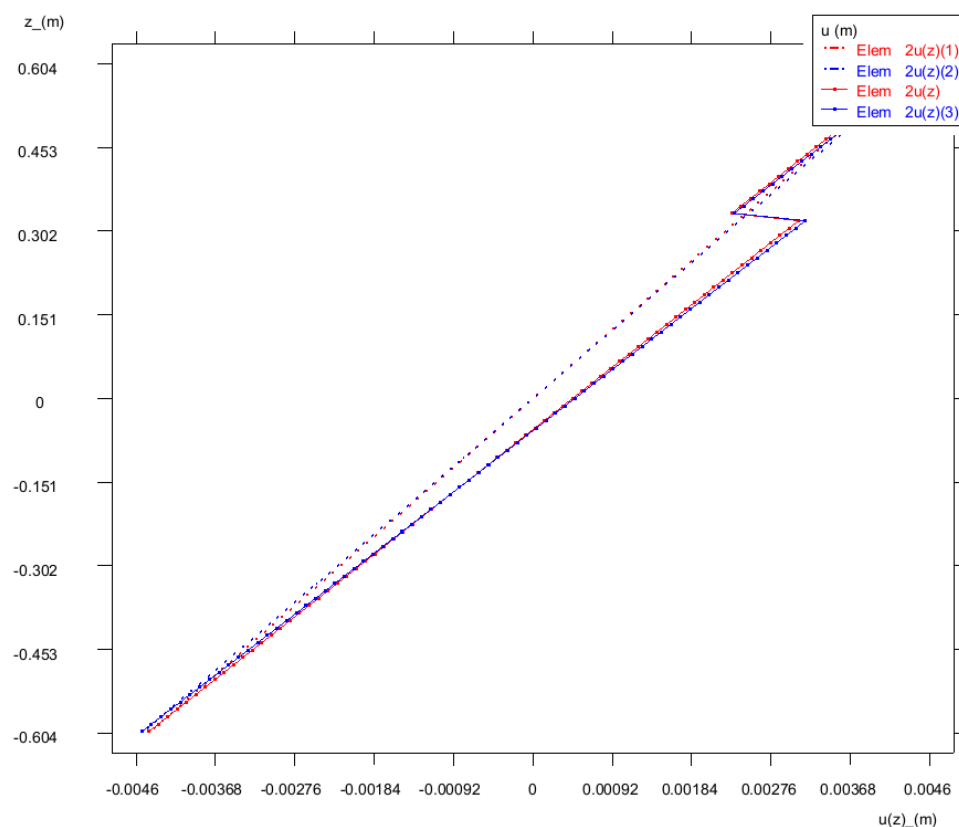
En las Grafica 4.18 y Grafica 4.19 se puede ver como en este modo de delaminacion (delaminacion en la mitad de la viga) en comparación con el modo de delaminacion del *Ejemplo Delaminado N°1* las tensiones axiales máximas (Sigma max.) han aumentado en $0,05 \text{ N/mm}^2$ mas. Tanto el material *GL28h* (resultados visibles en la Grafica 4.18) como el material *GL28c* (resultados visibles en la Grafica 4.19) han aumentado en $0,4 \text{ N/mm}^2$ respecto a los ejemplos no delaminados. En ambos casos se puede apreciar como en la zona donde el elemento ha perdido sus propiedades, en la interfase 29, se producen unas tracciones y unas compresiones; en el ejemplo no delaminado en cambio las tensiones eran nulas. Ha pasado de trabajar como un único elemento a comenzar a trabajar como dos elementos diferentes que están perdiendo su vinculación o adherencia.



Grafica 4.20 Tensiones tangenciales de GL28h y GL28c. Delaminacion en la mitad

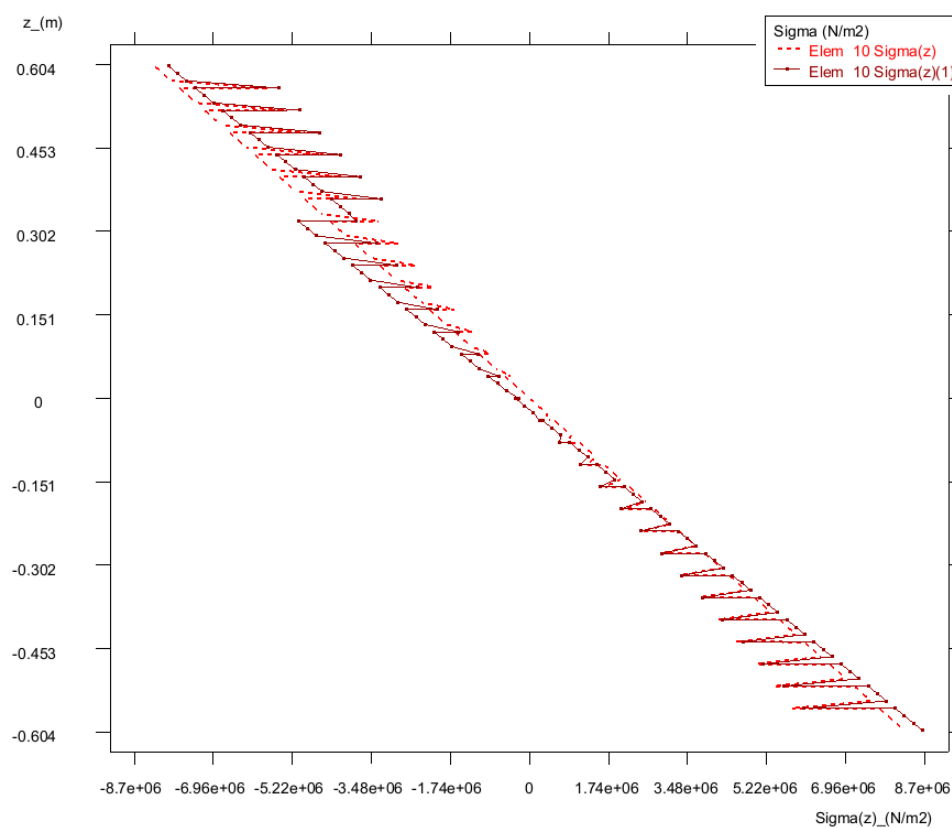
Por último en la Grafica 4.20 se pueden observar las tensiones tangenciales (Tau) de ambos materiales *GL28h* y *GL28c* para el caso sin daño interlaminar (*Ejemplo N°1* y *N°2*) y para el caso con daño en la interfase 12. Del mismo modo a los ejemplos no delaminados (*Ejemplo N°1* y *N°2*), el material *GL28h* delaminado da una tensión tangencial máxima (Tau max.) mayor que el material *GL28c* delaminado. En este modo de delaminacion a diferencia del *Ejemplo de Delaminado N°1* las tensiones tangenciales máximas (Tau max.) no sufre un aumento de tensión sino una disminución en comparación con las producidas en los ejemplos no delaminados. La mayor variación de tensión ocurre en la interfase delaminada, interfase 29, en la cual se ha producido una disminución de $0,5 \text{ N/mm}^2$ en la tensión tangencial.

DELAMINACION DE 1/5 SUPERIOR DE LA VIGA (INTERFASE 46)

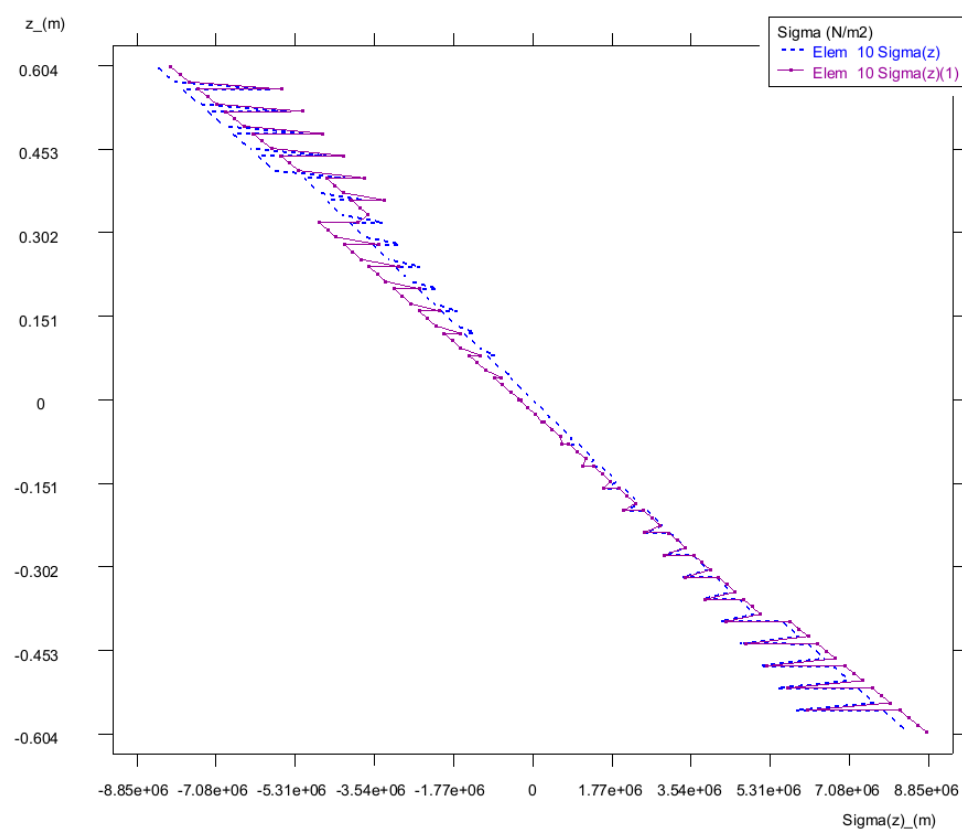


Grafica 4.21 Desplazamientos axiales de GL28h y GL28c. Delaminacion 1/5 superior

Como es apreciable en la Grafica 4.21 en esta ocasión el desplazamiento axial máximo (u_{max}) es igual al del *Ejemplo Delaminado N°1* (delaminacion en el 1/5 inferior) y ha variado mínimamente respecto a los ejemplos sin delaminar (Ejemplos N°1 y N°2). El desplazamiento relativo interlaminar se produce en la interfase 46. Puede decirse que la grafica es simétrica al del *Ejemplo Delaminado N°1*.

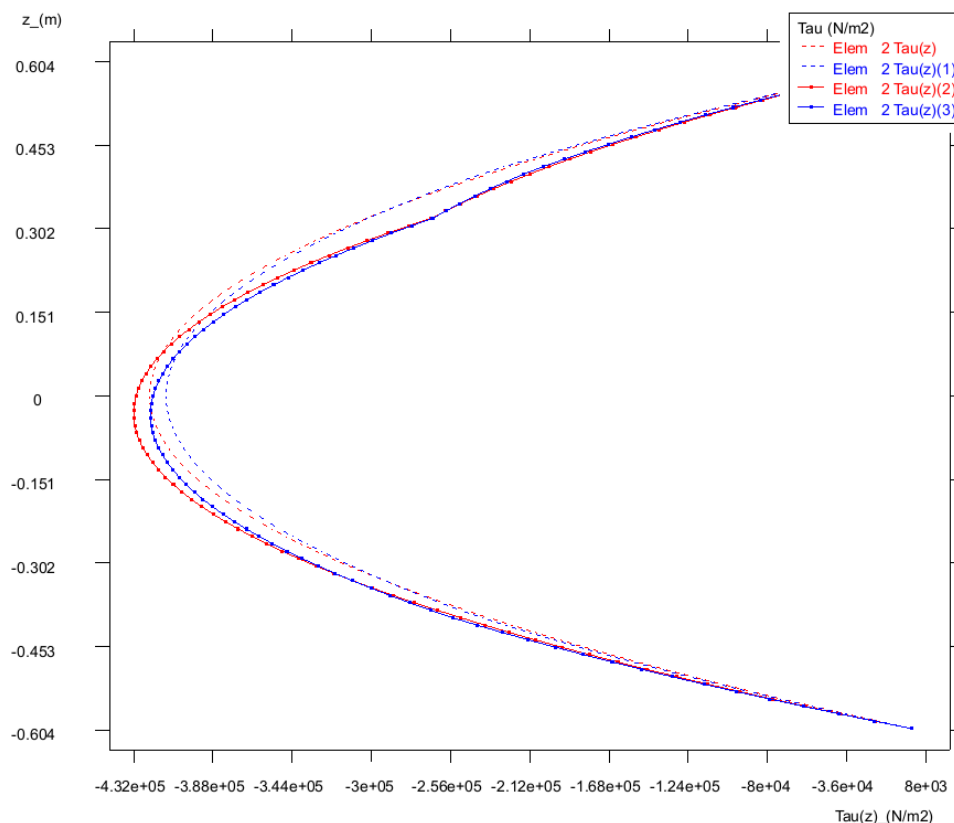


Grafica 4.22 Tensiones axiales de GL28h. Delaminación 1/5 superior



Grafica 4.23 Tensiones axiales de GL28c. Delaminación 1/5 superior

En las Grafica 4.22 y Grafica 4.23 se puede ver claramente como varían las tensiones axiales en el modo no delaminado. Se aprecia claramente como hay un salto (variación) de tensiones en la zona afectada dando como resultado una disminución de tensiones en la cara superior del elemento y un aumento de tensiones en la cara inferior del elemento. Dicho efecto es simétrico y opuesto al ocurrido en el *Ejemplo Delaminado N°1*. En esta ocasión las tensiones axiales máximas han aumentado algo más que en el *Ejemplo Delaminado N°1*. Para el caso de material homogéneo *GL28h* ha aumentado en $0,4 \text{ N/mm}^2$ mientras que para el material compuesto *GL28c* ha aumentado en $0,45 \text{ N/mm}^2$.



Grafica 4.24 Tensiones tangenciales de GL28h y GL28c. Delaminacion 1/5 superior

Por último en la Grafica 4.24 de tensiones tangenciales es simétrica a la del *Ejemplo Delaminado N°1*. Los valores de tensiones tangenciales máximas (Tau max.) han aumentado en la misma cantidad en ambos ejemplos. Han pasado de $0,423 \text{ N/mm}^2$ a $0,432 \text{ N/mm}^2$ en el caso del material *GL28h* y de $0,414 \text{ N/mm}^2$ a $0,432 \text{ N/mm}^2$ en el caso del material *GL28c*.

CONCLUSIONES

La primera conclusión particular que se obtiene de los Ejemplos Delaminados de las líneas anteriores es que para una viga biapoyada delaminada en el 1/5 superior e inferior del canto, ya sea su sección transversal homogénea (*GL28h*) o compuesta por varios clases resistentes (*GL28c*), los desplazamientos axiales (u), las tensiones axiales (σ) y las tensiones tangenciales (τ) son parecidas en valores y simétricas respecto el eje longitudinal de la viga.

Es decir, tanto en el modo delaminado del 1/5 inferior como en el modo delaminado del 1/5 superior las graficas adquieren aspecto simétrico y a simple vista los valores son muy cercanos. Para el desplazamiento axial (u), por ejemplo, hay una variación mínima de valores entre ambos casos. La diferencia esta que en el modo delaminado del 1/5 inferior el desplazamiento crece en la cara superior de la viga y en el modo de delaminacion del 1/5 inferior crece en la cara inferior de la viga.

Ocurre lo mismo para las tensiones tangenciales, sus graficas son simétricas, y el aumento en el valor de la tensión tangencial máxima (τ_{max}) ha sido de 0,009 N/mm² en el *GL28h* y 0.018 N/mm² en *GL28c*. Como se puede apreciar el aumento es despreciable.

En el caso de la tensión axial (σ) existe alguna diferencia. Para el modo de delaminacion del 1/5 inferior de la viga la variación respecto al modo no delaminado en ambos materiales (*GL28h* y *GL28c*) ha sido de 0,35 N/mm² mientras que para el modo de delaminacion del 1/5 superior estas cantidades se han visto un poco incrementadas. En el material *GL28h* se ha producido un incremento de 0,4 N/mm² mientras que en el material *GL28c* se ha incrementado en 0,45 N/mm².

En todas esta graficas el material *GL28c* da unos valores mayores que el material *GL28h*, del mismo modo que ocurría en los ejemplos sin delaminar (*Ejemplo N°1* y *N°2*). Esto se debe a la diferencia, algo menor, de rigidez que tiene el material compuesto.

Del mismo modo a lo que ocurre con las tensiones axiales (σ) ocurre con la flecha. Ambos materiales tienen flechas que difieren entre sí en torno al 1-2 mm siendo la flecha del material *GL28c* en el modo delaminado del 1/5 superior la mayor. El modo delaminado del 1/5 superior da una diferencia de flechas de 1 mm superior en comparación al modo delaminado del 1/5 inferior para ambos materiales.

Por otro lado tenemos el modo delaminado medio, el ocurrido cuando se pierden propiedades en la interfase 29. Para este modo, como se puede ver en las graficas anteriores, el desplazamiento axial (u) si que aumenta en 0,3mm respecto los ejemplos no delaminados.

Las tensiones axiales sufren un aumento parecido al modo delaminado del 1/5 superior. Dicho aumento es de 0,4 N/mm² respecto a los modos no delaminados.

A diferencia de los modos delaminados del 1/5 superior e inferior en este modo se aprecia como en el lugar donde se ha ocasionado el daño, donde antes se situaba la

línea neutra de tensiones en los ejemplos no delaminados, se producen unas tracciones y compresiones. Esto se comienza a asemejar al trabajo de dos elementos diferenciados que están adheridos en mayor o menor medida entre sí.

En la grafica de tensiones tangenciales (Tau) para el modo delaminado medio se aprecia claramente la disminución de tensiones máximas alrededor de $0,5 \text{ N/mm}^2$. Se aprecia como surgen 2 nuevos puntos de tensiones tangenciales máximas (Tau max.) que corresponden con las dos nuevas líneas neutras (donde las tensiones son nulas) comentadas en el párrafo anterior.

En cuanto a las flechas, en este modo delaminado surge una diferencia notable en comparación con los modos delaminados del 1/5 superior e inferior. Se sigue manteniendo que la flecha ocasionada en el material *GL28c* es mayor que en el *GL28h* debido a su menor rigidez. En comparación con los modos delaminados mencionados la flecha se ha multiplicado por 2 y tiene una diferencia respecto a los modos no delaminados de 10mm para el material *GL28h* y de 11mm para el material *GL28c*. Esto es debido a que al comenzar a trabajar como dos elementos diferenciados adheridos en menor grado y por tanto el elemento global pierde rigidez.

Como conclusiones generales se tiene que:

- Como el material *GL28c* es menos rígido que el material *GL28h* sufre unos movimientos axiales mayores y en él se producen flecha mayores respecto a los modelos sin delaminar. Del mismo modo surgen unas diferencias mayores en las tensiones axiales.
- El material *GL28c* sufre menores tensiones tangenciales que el material *GL28h*.
- En los modos delaminados del 1/5 superior e inferior se producen, en general, menores desplazamiento y tensiones axiales ya que siguen trabajando como un elemento; mientras que el modo delaminado medio sufre mayores diferencias de desplazamientos, tensiones axiales y flechas respecto el modo no delaminado ya que pierde rigidez al comenzar a trabajar como 2 elementos diferenciados.
- Parece ser que los elementos delaminados no sufrirían demasiado desde el punto de vista de la resistente, con un grado de daño medio ($\beta_d=0.5$), ya que se puede apreciar que los valores no varían sustancialmente.
- Por el contrario los elementos delaminados con un grado medio de daño ($\beta_d=0.5$) tienen una variación suficiente en sus flechas. Podrían no cumplir los requisitos de flechas y ser necesario un refuerzo desde el punto de vista de los E.L.Servicio.

5. CONCLUSIONES FINALES

Como se ha podido observar en los primeros apartados del trabajo, *la M.L.E.* es un material muy apto para aplicarlo en estructuras de edificación. Sus ventajas son muchas en lo referente a la cobertura de grandes luces, estética, reacción ante el fuego, entre otros. Por el contrario tienen desventajas a la hora de transportar elementos de grandes longitudes y son vulnerables a los ataques por xilófagos; cuestiones superables hoy día mediante la elección de una tipología estructural adecuada y gracias a los avances ocasionados en los productos protectores de la madera.

En cambio, al no ser un material muy empleado, y por su característica de material ortótropo, los agentes de la construcción no se aventuran a su utilización. Se requiere un mayor conocimiento de la forma de trabajo de dicho material y de sus modos de fallo. Para ello es preciso de nuevas herramientas computacionales.

Hasta la aparición de las *Teorías de Vigas para Materiales Compuestos* se podía abordar el análisis de este tipo de elementos compuestos laminares mediante las *Teorías de Sólidos 3D*. Estas teorías daban resultados adecuados pero su análisis era muy laborioso desde el punto de vista del modelado y desde el punto de vista del coste computacional.

Por esta razón se desarrollaron *nuevas teorías* de vigas capaces de abordar el problema mediante modelados menos laboriosos. No obstante hasta la llegada de las *Teorías Zig-Zag Refinadas* no se obtuvieron teorías que daban resultados adecuados a la realidad. Como hemos podido apreciar en el *Capítulo 3* las Teorías Zig-Zag Refinadas tienen un comportamiento muy adecuado en lo referente a los resultados que se obtienen.

De esta manera se concluye que dichas teorías son muy adecuadas para su *implementación en software de cálculo* de estructuras de elementos compuesto laminares, como lo es el material objeto del trabajo (M.L.E.), ya que con ellas se obtienen resultados muy cercanos a la realidad y su coste computacional es realmente bajo. Del mismo modo, estas teorías son muy exactas en el análisis seccional de los materiales compuestos laminados.

Apuntar que en el *Capítulo 3* se comparan el elemento LRZ y el elemento EEBZ2. En dicho apartado se concluye que existen ventajas en la interpolación cubica C1 del elemento EEBZ2 frente a la interpolación C0 del elemento LRZ para la deflexión vertical. A pesar de las dificultades de la interpolación C1 para representar la deformación tangencial en un empotramiento, dicha interpolación tiene la ventaja de estar libre del bloqueo por cortante, por lo que la matriz de rigidez puede ser calculada mediante integración exacta, además de tener un ratio de convergencia de resultados más rápido que otros elementos

En los ejemplos numéricos desarrollados sobre M.L.E se han obtenido conclusiones interesantes sobre los diferentes laminados que hoy día se pueden encontrar en el mercado. Dichos ejemplos se han centrado en comparar las secciones laminares de material homogéneo (GL28h) y las sección de material compuesto (GL28c). Por lo que se puede observar en dicho ejemplos a pesar de que el material compuesto tiene una rigidez menor que el homogéneo, este reduce el peso propio de la estructura y puede llegar a abaratarla, ya que la mayoría de las láminas son de capacidad resistente menor. No obstante esto no se podrá aplicar en todos los casos, sobre todo en aquellos en los que se requieran deformaciones muy pequeñas.

Del mismo modo, se puede apreciar que las delaminaciones cercanas a las caras superior e inferior ocasionan menores problemas seccionales y de deformación que los ocasionados cercanos al eje medio de la viga. Mediante el modelado la delaminación será posible analizar con más exactitud las patologías por delaminación producidas en este tipo de elementos para buscar soluciones o alternativas.

Finalmente añadir que, gracias al desarrollo de estas herramientas computacionales, y su implementación en software de cálculo, se adquirirá un mayor conocimiento sobre la capacidad estructural que tiene la M.L.E., u otros materiales compuestos realizados con madera, para de esta forma poder dar razones de mayor peso para que los agentes implicados en la construcción se aventuren a utilizar lo que será el *Material del siglo XXI*.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Oñate, *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells*, 2013, CIMNE
- [2] D. Di Capua, y E., Oñate, *Tow-noded zigzag beam element accounting for shear effects based on an extended Euler Bernoulli theory*, 2015
- [3] E. Oñate, *Calculo de Estructuras con Materiales Compuestos Laminados por el Método de Elementos Finitos*, 2002
- [4] E. Oñate, A. Eijo y S. Oller, *Simple and accurate two-noded beam element for composite laminated beams using a refined zigzag theory*, 2012
- [5] E. Oñate, *Limites de los Métodos Numéricos*, 2000, CIMNE
- [6] F. Arriaga Martitegui, *Estructuras de Madera. Diseño y Calculo*, 2008, AITIM
- [7] CTE Documento Básico Seguridad Estructural – MADERA, 2009

Artículos y demás información de la Web

- [8] F. Arriaga Martitegui, *Consideraciones sobre las normas para el cálculo de estructuras de madera*
- [9] F. Arriaga Martitegui y J.R. Blasco Casanova, *Estructuras de madera (Jornadas de Introducción)*
- [10] J.I. Fernandez-Golfin, M.R. Diez y E. Hermoso, *Normas aplicables a las estructuras de madera laminada encolada*, 2003, AITIM
- [11]
- [12] L., Somoza, *La Madera laminada encolada: Historia y Definición*
- [13] J. Augusto, *La Madera Laminada: Una Alternativa Estructural y Ambiental*
- [14] ProMateriales, *Madera Laminada de uso estructural. Elegancia y Resistencia*
- [15] M. Angel Abian (AIDIMA), *Arquitectura Orgánica con Madera: Nuevas oportunidades para el sector*
- [16] VIDEO por la Universidad Politécnica de Madrid, *Vivir con madera: MADERA LAMINADA, para Televisión Española 2*